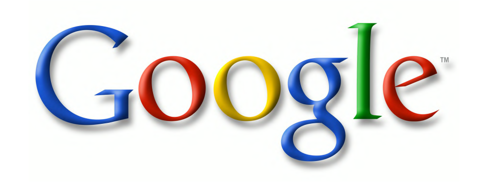
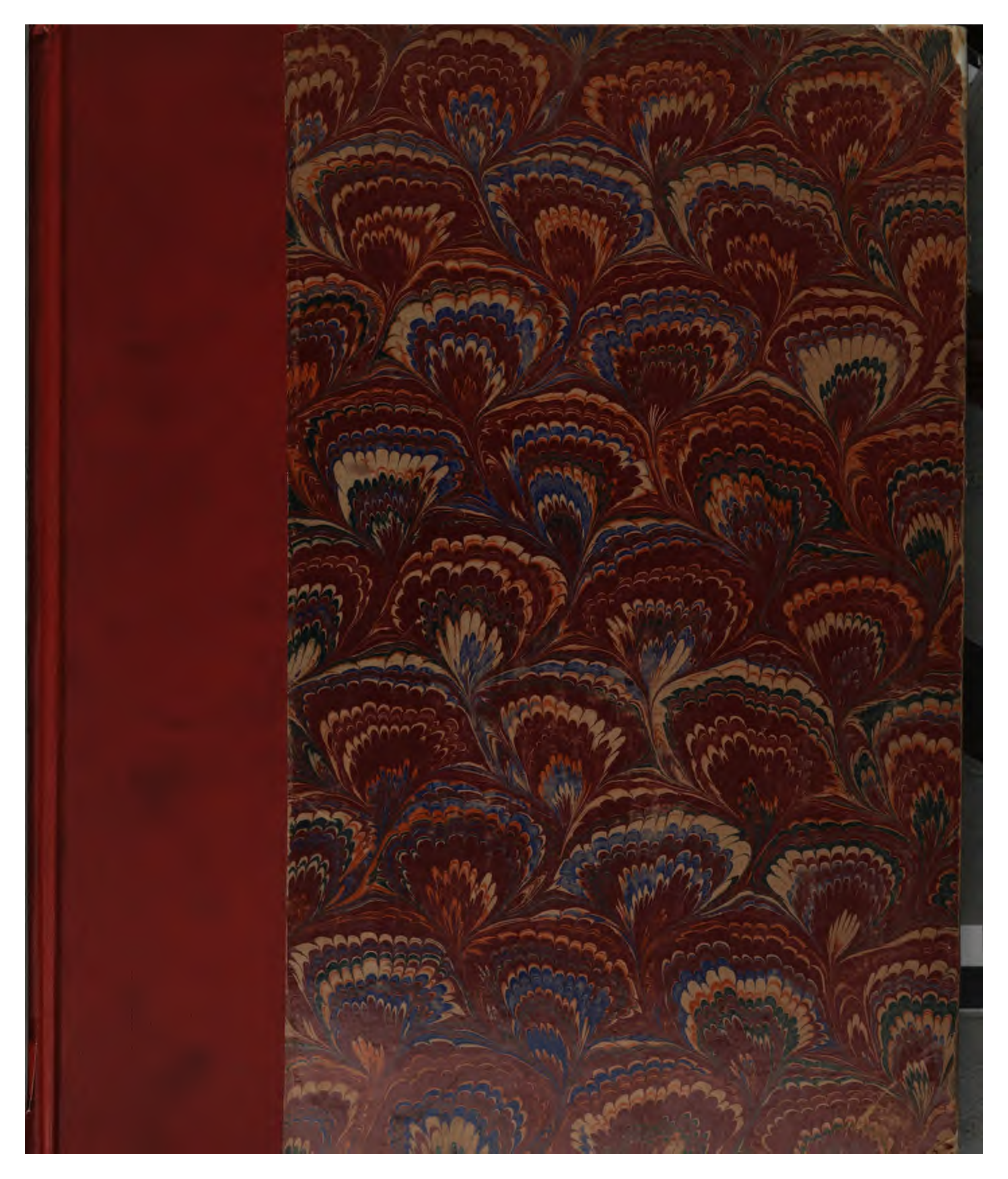
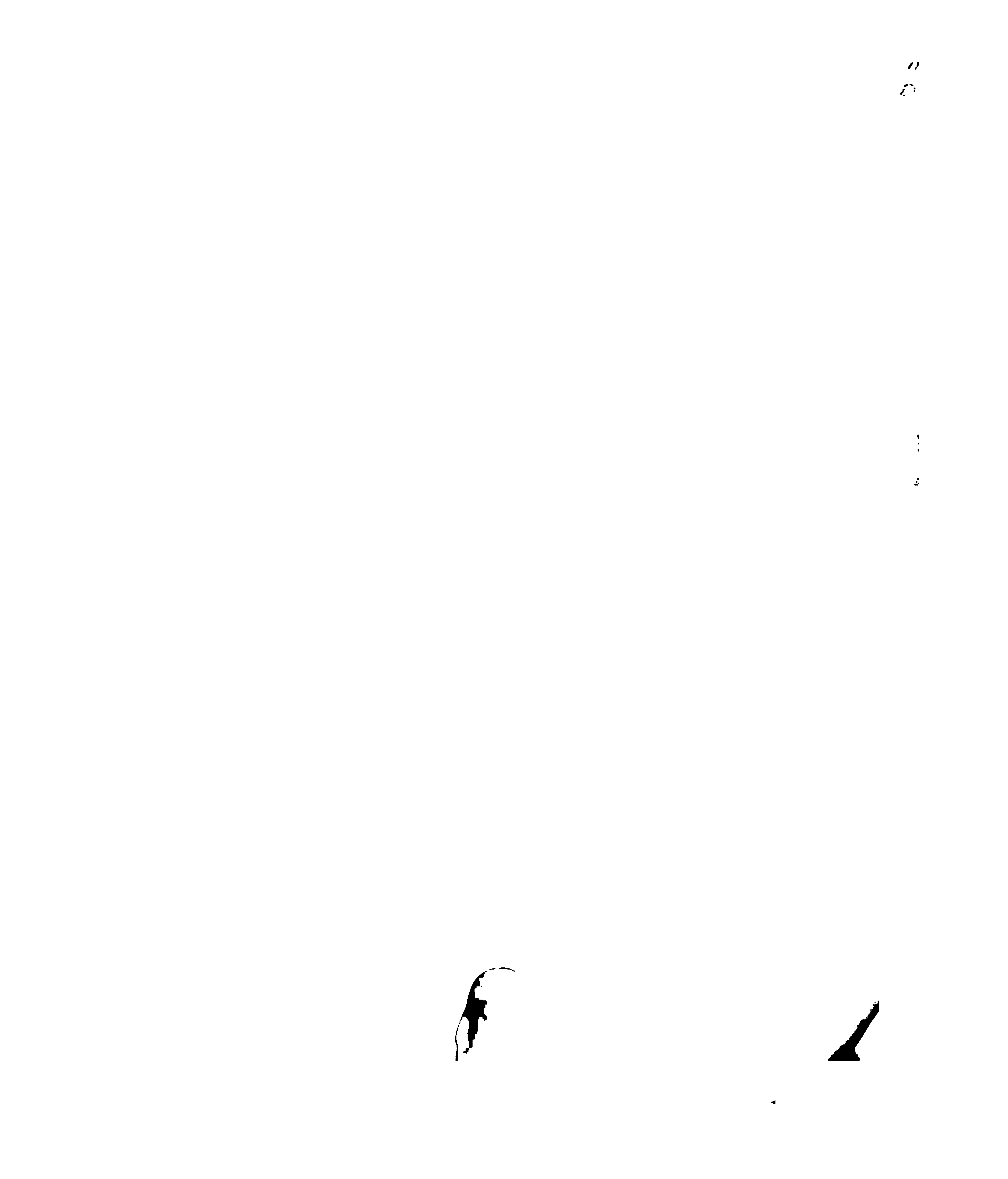






RECHERCHES

SUR

L'ÉLASTICITÉ.

Extrait des *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*,
3ᵉ série, t. XXI, XXII et XXIII; 1904, 1905 et 1906.

RECHERCHES

SUR

L'ÉLASTICITÉ

PAR

Pierre DUHEM,

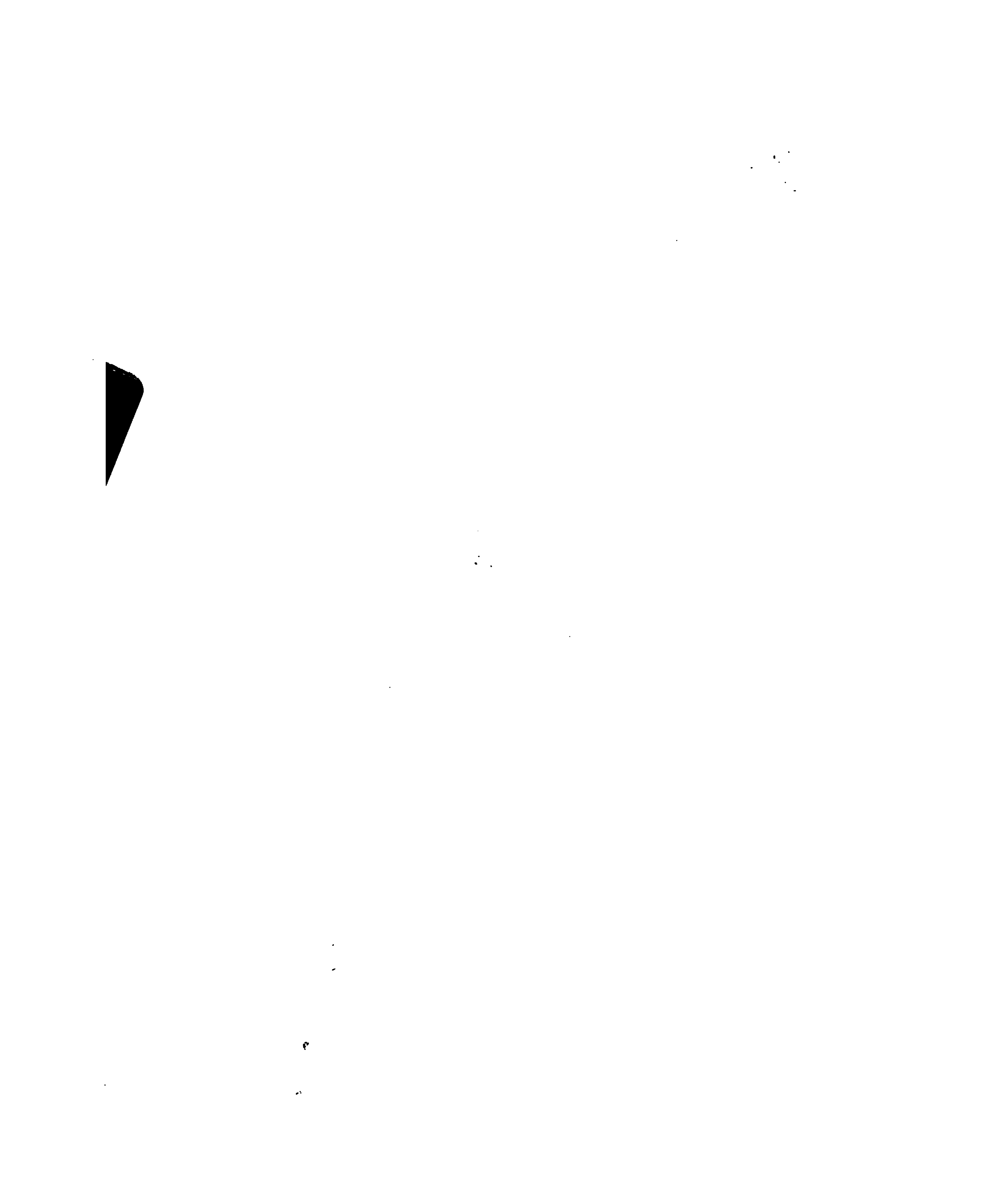
CORRESPONDANT DE L'INSTITUT DE FRANCE,
PROFESSEUR DE PHYSIQUE THÉORIQUE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX.

DE L'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT DES MILIEUX VITREUX.
LES MILIEUX VITREUX PEU DÉFORMÉS.
LA STABILITÉ DES MILIEUX ÉLASTIQUES.
PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES ONDES DANS LES MILIEUX VISQUEUX
ET NON VISQUEUX.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1906



RECHERCHES

SUR

L'ÉLASTICITÉ.

Extrait des *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure,*
3e série, t. XXI, XXII et XXIII; 1904, 1905 et 1906.

RECHERCHES

SUR

L'ÉLASTICITÉ

PAR

Pierre DUHEM,

CORRESPONDANT DE L'INSTITUT DE FRANCE,
PROFESSEUR DE PHYSIQUE THÉORIQUE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX.

DE L'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT DES MILIEUX VITREUX.
LES MILIEUX VITREUX PEU DÉFORMÉS.
LA STABILITÉ DES MILIEUX ÉLASTIQUES.
PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES ONDES DANS LES MILIEUX VISQUEUX
ET NON VISQUEUX.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1906

RECHERCHES SUR L'ÉLASTICITÉ.

PREMIÈRE PARTIE.

DE L'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT DES MILIEUX VITREUX.

INTRODUCTION.

La plupart des travaux dont la théorie de l'élasticité a été l'objet se bornent à étudier des corps dont les déformations sont extrêmement petites, soit que leurs divers points matériels demeurent immobiles, soit qu'un mouvement de très faible amplitude les anime.

La limite qui restreint ainsi les problèmes étudiés ne constitue pas une entrave gênante lorsqu'on se propose seulement d'analyser les modifications des corps très peu déformables auxquels on réserve le nom de solides élastiques; mais elle rend inutilisables les résultats obtenus par le théoricien, lorsque celui-ci se propose d'étudier ces corps mous ou pâteux qui forment la transition entre les fluides et les solides; il est alors indispensable de formuler des lois applicables aux milieux qui ont subi des déformations finies.

G. Kirchhoff (1) et M. J. Boussinesq (2) nous ont fait connaître les

(1) G. Kirchhoff, *Ueber die Gleichungen des Gleichgewichtes eines elastischen Körpers bei nicht unendlich kleinen Verschiebungen seiner Theile* (*Sitzungsberichte der mathematisch naturwissenschaftlichen Classe der Akademie der Wissenschaften*, Bd. IX, S. 762. Vienne 1852). Cet écrit n'a pas été réimprimé dans les *Abhandlungen* de G. Kirchhoff.

(2) J. Boussinesq, *Théorie des Ondes liquides périodiques*, Note III (Mémoires présentés par divers savants à l'Institut de France, t. XX).

lois qui président à l'équilibre de semblables milieux, du moins lorsque leurs éléments sont simplement soumis à des *actions newtoniennes.* Il était intéressant d'étendre leur analyse au cas beaucoup plus général et insoupçonné avant nos recherches sur la Mécanique des fluides [1], où les masses élémentaires qui composent le milieu sont soumises à des *actions non newtoniennes;* le présent Mémoire apporte ce complément aux recherches de nos illustres prédécesseurs et met en évidence, dans le cas où les actions ne sont pas newtoniennes, l'existence de *couples élémentaires* auxquels les actions newtoniennes ne sauraient donner naissance.

Les lois du mouvement de milieux affectés de déformations finies se tireraient des lois qui président à leur équilibre au moyen du principe de d'Alembert, si les milieux étudiés n'étaient affectés d'aucune viscosité; mais les corps mous et pâteux, qui offrent à cette analyse ses plus intéressantes applications, sont, en même temps, dans la plupart des cas, des corps très visqueux; il serait illusoire d'en étudier les mouvements si l'on devait faire abstraction de leur viscosité.

Nous sommes donc naturellement conduits à préciser les lois auxquelles obéit la viscosité au sein de milieux élastiques.

Ce problème n'a tenté jusqu'ici, à notre connaissance, que les efforts d'un seul analyste, M. Oskar Emil Meyer [2]. Mais les recherches de M. Meyer se sont bornées aux mouvements très petits d'un corps isotrope à la fois élastique et visqueux; en outre elles reposent sur certaines hypothèses moléculaires que nous nous gardons toujours d'invoquer. Il y avait donc lieu de créer les formules qui régissent les actions de viscosité au sein de milieux élastiques affectés de déformations finies. C'est l'un des principaux objets du présent Mémoire.

Ces formules nous ont permis d'obtenir certains résultats; en particulier, elles nous ont permis d'étendre à tous les milieux élastiques visqueux, qu'ils soient vitreux ou cristallisés, une proposition que

---

(1) *Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. X, 1893, p. 183).

(2) O.-E. Meyer, *Zur Theorie der inneren Reibung* (*Borchardt's Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. LXXVIII, 1874, p. 130).

nous avions déjà démontrée pour les fluides visqueux : *Les seules ondes qui puissent persister en un milieu visqueux sont des ondes sans propagation, qui séparent sans cesse les deux mêmes portions du milieu.*

D'ailleurs, l'emploi de méthodes semblables à celles dont nous avions fait usage dans l'étude des fluides nous a permis de donner, de la propagation des ondes au sein des milieux élastiques non visqueux, une analyse qui ne laisse place à aucun cas d'exception.

Les milieux que nous avons étudiés ont toujours été supposés dénués d'hystérésis; la possibilité des déformations permanentes a donc été exclue, ce qui restreint la généralité de notre analyse et la portée expérimentale des résultats obtenus. Mais les formules cinématiques qui nous ont permis d'étudier la viscosité des milieux élastiques nous permettront également d'étendre à de tels milieux les principes de notre théorie des déformations permanentes.

CHAPITRE I.

LES DÉFORMATIONS D'UN MILIEU CONTINU.

I. — Les déformations finies d'un milieu continu.

Nous commencerons par établir quelques formules relatives aux déformations finies d'un milieu continu. Ces formules, dues à G. Kirchhoff et à M. Boussinesq, ont été magistralement exposées par MM. E. et F. Cosserat dans un *Premier Mémoire sur la Théorie de l'Élasticité* (¹). Nous aurions pu nous borner à renvoyer le lecteur à ce Mémoire, si complet au double point de vue historique et théorique; si nous ne l'avons pas fait, si nous avons repris la démonstration des formules strictement indispensables, c'est surtout afin de fixer les notations dont nous ferons usage.

(¹) Eugène et François Cosserat, *Sur la Théorie de l'Élasticité. Premier Mémoire* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. X, 1896).

Prenons un milieu continu dans un certain état, fixé une fois pour toutes, que nous nommerons l'*état initial;* un point matériel déterminé occupe, dans cet état, une position déterminée μ dont les coordonnées sont a, b, c. La connaissance de ces coordonnées permettra de reconnaître ce point matériel après que le milieu aura subi un déplacement et une déformation quelconque, selon le procédé employé en Hydrodynamique et appelé *procédé de Lagrange.*

Au sein du milieu déformé et déplacé, le même point matériel occupe la position M dont les coordonnées sont x, y, z; x, y, z sont des fonctions continues de a, b, c, dont la connaissance définit la déformation et le déplacement subis par le système.

Dans la plupart des cas, nous poserons

$$(1) \qquad x = a + \xi, \qquad y = b + \eta, \qquad z = c + \zeta.$$

ξ, η, ζ seront également des fonctions de a, b, c. Nous aurons

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial a} = 1 + \dfrac{\partial \xi}{\partial a}, & \dfrac{\partial x}{\partial b} = \dfrac{\partial \xi}{\partial b}, & \dfrac{\partial x}{\partial c} = \dfrac{\partial \xi}{\partial c}, \\ \dfrac{\partial y}{\partial a} = \dfrac{\partial \eta}{\partial a}, & \dfrac{\partial y}{\partial b} = 1 + \dfrac{\partial \eta}{\partial b}, & \dfrac{\partial y}{\partial c} = \dfrac{\partial \eta}{\partial c}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial a} = \dfrac{\partial \zeta}{\partial a}, & \dfrac{\partial z}{\partial b} = \dfrac{\partial \zeta}{\partial b}, & \dfrac{\partial z}{\partial c} = 1 + \dfrac{\partial \zeta}{\partial c}. \end{cases}$$

Soit un point matériel qui, dans l'état initial, occupe une position $\mu'(a', b', c')$ infiniment voisine de la position $\mu(a, b, c)$; dans l'état déformé, il occupe une position $M'(x', y', z')$, infiniment voisine de la position $M(x, y, z)$. En se bornant aux infiniment petits du premier ordre, on a

$$(3) \qquad \begin{cases} (x' - x) = \dfrac{\partial x}{\partial a}(a' - a) + \dfrac{\partial x}{\partial b}(b' - b) + \dfrac{\partial x}{\partial c}(c' - c), \\ (y' - y) = \dfrac{\partial y}{\partial a}(a' - a) + \dfrac{\partial y}{\partial b}(b' - b) + \dfrac{\partial y}{\partial c}(c' - c), \\ (z' - z) = \dfrac{\partial z}{\partial a}(a' - a) + \dfrac{\partial z}{\partial b}(b' - b) + \dfrac{\partial z}{\partial c}(c' - c). \end{cases}$$

Ces équations peuvent être regardées comme des équations en $(a' - a)$,

$(b'-b)$, $(c'-c)$. Leur déterminant est

$$(4)\qquad \mathfrak{D} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)}.$$

Ce déterminant ne s'annule jamais en une déformation qui laisse finie la densité en chaque point; nous savons, en effet, par l'équation de continuité, mise sous la forme de Lagrange, que le produit de la densité par le déterminant $\mathfrak{D}$ est égal à la densité dans l'état initial. Il résulte, en outre, de là que la valeur de $\mathfrak{D}$ est indépendante du choix des axes de coordonnées.

En résolvant les équations (3), nous trouvons

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathfrak{D}(a'-a) = \frac{D(y, z)}{D(b, c)}(x'-x) + \frac{D(z, x)}{D(b, c)}(y'-y) + \frac{D(x, y)}{D(b, c)}(z'-z), \\ \mathfrak{D}(b'-b) = \frac{D(y, z)}{D(c, a)}(x'-x) + \frac{D(z, x)}{D(c, a)}(y'-y) + \frac{D(x, y)}{D(c, a)}(z'-z), \\ \mathfrak{D}(c'-c) = \frac{D(y, z)}{D(a, b)}(x'-x) + \frac{D(z, x)}{D(a, b)}(y'-y) + \frac{D(x, y)}{D(a, b)}(z'-z). \end{cases}$$

Moyennant les égalités (2), on peut mettre les égalités (3) sous la forme

$$(3\ bis)\qquad \begin{cases} (x'-x) = \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial a}\right)(a'-a) + \frac{\partial \xi}{\partial b}(b'-b) + \frac{\partial \xi}{\partial c}(c'-c), \\ (y'-y) = \frac{\partial \eta}{\partial a}(a'-a) + \left(1 + \frac{\partial \eta}{\partial b}\right)(b'-b) + \frac{\partial \eta}{\partial c}(c'-c), \\ (z'-z) = \frac{\partial \zeta}{\partial a}(a'-a) + \frac{\partial \zeta}{\partial b}(b'-b) + \left(1 + \frac{\partial \zeta}{\partial c}\right)(c'-c). \end{cases}$$

En même temps, le déterminant $\mathfrak{D}$ devient

$$(4\ bis)\qquad \mathfrak{D} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial \xi}{\partial a} & \frac{\partial \xi}{\partial b} & \frac{\partial \xi}{\partial c} \\ \frac{\partial \eta}{\partial a} & 1 + \frac{\partial \eta}{\partial b} & \frac{\partial \eta}{\partial c} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial a} & \frac{\partial \zeta}{\partial b} & 1 + \frac{\partial \zeta}{\partial c} \end{vmatrix}.$$

Dans les égalités (3 *bis*), regardons a, b, c et x, y, z comme des constantes; a', b', c' et x', y', z' comme des variables; ces équations définissent une transformation homographique d'un espace $\mu'(a', b', c')$ en un autre espace $M'(x', y', z')$, transformation qui fait correspondre le point $M(x, y, z)$ au point $\mu(a, b, c)$. Cette transformation représente la partie principale du déplacement et de la déformation que subit une masse infiniment petite à laquelle appartient le point matériel placé successivement en μ et en M.

Étudions d'une manière générale cette transformation.

Considérons, dans l'espace des (x', y', z'), la sphère S de centre M et de rayon 1 et cherchons de quelle surface elle est la transformée.

Pour que le point $M'(x', y', z')$ se trouve sur cette sphère, il faut et il suffit que l'on ait

$$(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2=1.$$

Pour cela, selon les égalités (3 *bis*), il faut et il suffit que ce point M' corresponde à un point μ' dont les coordonnées a', b', c' vérifient l'équation

$$(6)\qquad \begin{aligned}&\left[\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)(a'-a)+\frac{\partial\xi}{\partial b}(b'-b)+\frac{\partial\xi}{\partial c}(c'-c)\right]^2\\ &+\left[\frac{\partial\eta}{\partial a}(a'-a)+\left(1+\frac{\partial\eta}{\partial b}\right)(b'-b)+\frac{\partial\eta}{\partial c}(c'-c)\right]^2\\ &+\left[\frac{\partial\zeta}{\partial a}(a'-a)+\frac{\partial\zeta}{\partial b}(b'-b)+\left(1+\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right)(c'-c)\right]^2=1.\end{aligned}$$

Cette équation exprime que le point $\mu'(a', b', c')$ a pour lieu un certain ellipsoïde E ayant pour centre le point $\mu(a, b, c)$.

L'équation de cet ellipsoïde E, développée, s'écrit

$$(7)\qquad \begin{aligned}&(1+2\varepsilon_1)(a'-a)^2+(1+2\varepsilon_2)(b'-b)^2+(1+2\varepsilon_3)(c'-c)^2\\ &+2\gamma_1(b'-b)(c'-c)+2\gamma_2(c'-c)(a'-a)+2\gamma_3(a'-a)(b'-b)=1,\end{aligned}$$

en désignant par ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 les six fonctions suivantes de a, b, c:

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned}\varepsilon_1&=\frac{\partial\xi}{\partial a}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial a}\right)^2\right],\\ \varepsilon_2&=\frac{\partial\eta}{\partial b}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial b}\right)^2\right],\\ \varepsilon_3&=\frac{\partial\zeta}{\partial c}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial c}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial c}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right)^2\right];\end{aligned}\right.$$

$$
(8)\ (suite)\quad
\begin{cases}
\gamma_1 = \dfrac{\partial\eta}{\partial c} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial b} + \dfrac{\partial\xi}{\partial b}\dfrac{\partial\xi}{\partial c} + \dfrac{\partial\eta}{\partial b}\dfrac{\partial\eta}{\partial c} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial b}\dfrac{\partial\zeta}{\partial c}, \\
\gamma_2 = \dfrac{\partial\zeta}{\partial a} + \dfrac{\partial\xi}{\partial c} + \dfrac{\partial\xi}{\partial c}\dfrac{\partial\xi}{\partial a} + \dfrac{\partial\eta}{\partial c}\dfrac{\partial\eta}{\partial a} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial c}\dfrac{\partial\zeta}{\partial a}, \\
\gamma_3 = \dfrac{\partial\xi}{\partial b} + \dfrac{\partial\eta}{\partial a} + \dfrac{\partial\xi}{\partial a}\dfrac{\partial\xi}{\partial b} + \dfrac{\partial\eta}{\partial a}\dfrac{\partial\eta}{\partial b} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial a}\dfrac{\partial\zeta}{\partial b}.
\end{cases}
$$

Cet ellipsoïde admet trois axes rectangulaires; soient σ la longueur de l'un des demi-axes et $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ses cosinus directeurs; ces quatre quantités s'obtiendront, comme l'on sait, de la manière suivante :

Si nous posons

$$
(9)\qquad S = \frac{1}{\sigma^2},
$$

S sera l'une des trois racines de l'équation du troisième degré

$$
(10)\qquad
\begin{vmatrix}
1+2\varepsilon_1 - S & \gamma_3 & \gamma_2 \\
\gamma_3 & 1+2\varepsilon_2 - S & \gamma_1 \\
\gamma_2 & \gamma_1 & 1+2\varepsilon_3 - S
\end{vmatrix} = 0
$$

et $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ s'obtiendront alors en résolvant les équations

$$
(11)\qquad
\begin{cases}
(1+2\varepsilon_1)\mathcal{A} + \gamma_3\mathcal{B} + \gamma_2\mathcal{C} = S\mathcal{A}, \\
\gamma_3\mathcal{A} + (1+2\varepsilon_2)\mathcal{B} + \gamma_1\mathcal{C} = S\mathcal{B}, \\
\gamma_2\mathcal{A} + \gamma_1\mathcal{B} + (1+2\varepsilon_3)\mathcal{C} = S\mathcal{C},
\end{cases}
$$

$$
(12)\qquad \mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2 = 1.
$$

Aux trois racines S_1, S_2, S_3 de l'équation (10) correspondent trois systèmes de valeurs de σ, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ (pourvu que nous ne regardions pas comme distincts deux sytèmes de cosinus qui définissent une même droite), systèmes que nous désignerons par

$$
(13)\qquad
\begin{cases}
\sigma_1, & \mathcal{A}_1, & \mathcal{B}_1, & \mathcal{C}_1, \\
\sigma_2, & \mathcal{A}_2, & \mathcal{B}_2, & \mathcal{C}_2, \\
\sigma_3, & \mathcal{A}_3, & \mathcal{B}_3, & \mathcal{C}_3.
\end{cases}
$$

Considérons le demi-axe de longueur σ et de cosinus directeurs $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$; il correspond à un rayon de la sphère S, rayon qui a pour longueur 1 et pour cosinus directeurs $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$. Selon les égalités (3 *bis*),

Dans les égalités (3 *bis*), regardons a, b, c et x, y, z comme des constantes; a', b', c' et x', y', z' comme des variables; ces équations définissent une transformation homographique d'un espace $\mu'(a', b', c')$ en un autre espace $M'(x', y', z')$, transformation qui fait correspondre le point $M(x, y, z)$ au point $\mu(a, b, c)$. Cette transformation représente la partie principale du déplacement et de la déformation que subit une masse infiniment petite à laquelle appartient le point matériel placé successivement en μ et en M.

Étudions d'une manière générale cette transformation.

Considérons, dans l'espace des (x', y', z'), la sphère S de centre M et de rayon 1 et cherchons de quelle surface elle est la transformée.

Pour que le point $M'(x', y', z')$ se trouve sur cette sphère, il faut et il suffit que l'on ait

$$(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2=1.$$

Pour cela, selon les égalités (3 *bis*), il faut et il suffit que ce point M' corresponde à un point μ' dont les coordonnées a', b', c' vérifient l'équation

$$\begin{aligned}(6)\qquad &\left[\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)(a'-a)+\frac{\partial\xi}{\partial b}(b'-b)+\frac{\partial\xi}{\partial c}(c'-c)\right]^2\\ &+\left[\frac{\partial\eta}{\partial a}(a'-a)+\left(1+\frac{\partial\eta}{\partial b}\right)(b'-b)+\frac{\partial\eta}{\partial c}(c'-c)\right]^2\\ &+\left[\frac{\partial\zeta}{\partial a}(a'-a)+\frac{\partial\zeta}{\partial b}(b'-b)+\left(1+\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right)(c'-c)\right]^2=1.\end{aligned}$$

Cette équation exprime que le point $\mu'(a', b', c')$ a pour lieu un certain ellipsoïde E ayant pour centre le point $\mu(a, b, c)$.

L'équation de cet ellipsoïde E, développée, s'écrit

$$\begin{aligned}(7)\quad &(1+2\varepsilon_1)(a'-a)^2+(1+2\varepsilon_2)(b'-b)^2+(1+2\varepsilon_3)(c'-c)^2\\ &+2\gamma_1(b'-b)(c'-c)+2\gamma_2(c'-c)(a'-a)+2\gamma_3(a'-a)(b'-b)=1,\end{aligned}$$

en désignant par ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 les six fonctions suivantes de a, b, c:

$$(8)\qquad\left\{\begin{aligned}\varepsilon_1&=\frac{\partial\xi}{\partial a}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial a}\right)^2\right],\\ \varepsilon_2&=\frac{\partial\eta}{\partial b}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial b}\right)^2\right],\\ \varepsilon_3&=\frac{\partial\zeta}{\partial c}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial c}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial c}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right)^2\right];\end{aligned}\right.$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue. On voit que *les trois axes de l'ellipsoïde* E *correspondent à trois diamètres rectangulaires de la sphère* S.

μ' étant un point quelconque de l'espace (a', b', c'), projetons la longueur $\mu\mu'$ sur les trois demi-axes rectangulaires de l'ellipsoïde E; soient A_1, A_2, A_3 les trois projections; nous aurons

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} A_1 &= \mathcal{A}_1(a'-a) + \mathcal{B}_1(b'-b) + \mathcal{C}_1(c'-c),\\ A_2 &= \mathcal{A}_2(a'-a) + \mathcal{B}_2(b'-b) + \mathcal{C}_2(c'-c),\\ A_3 &= \mathcal{A}_3(a'-a) + \mathcal{B}_3(b'-b) + \mathcal{C}_3(c'-c).\end{aligned}\right.$$

Au point μ' correspond, dans l'espace des (x', y', z'), un point M'; projetons le segment MM' sur les trois diamètres rectangulaires de la sphère S qui correspondent aux trois axes de l'ellipsoïde E; soient X_1, X_2, X_3, les trois projections. Nous aurons

$$\begin{aligned} X_1 &= \mathcal{X}_1(x'-x) + \mathcal{Y}_1(y'-y) + \mathcal{Z}_1(z'-z),\\ X_2 &= \mathcal{X}_2(x'-x) + \mathcal{Y}_2(y'-y) + \mathcal{Z}_2(z'-z),\\ X_3 &= \mathcal{X}_3(x'-x) + \mathcal{Y}_3(y'-y) + \mathcal{Z}_3(z'-z).\end{aligned}$$

En vertu des égalités (3 *bis*) et (14), la première de ces égalités devient

$$\begin{aligned} X_1 = \sigma_1 \Big\{ & \left[\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)\mathcal{A}_1 + \frac{\partial\xi}{\partial b}\mathcal{B}_1 + \frac{\partial\xi}{\partial c}\mathcal{C}_1\right]\left[\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)(a'-a) + \frac{\partial\xi}{\partial b}(b'-b) + \frac{\partial\xi}{\partial c}(c'-c)\right]\\ & + \left[\frac{\partial\eta}{\partial a}\mathcal{A}_1 + \left(1+\frac{\partial\eta}{\partial b}\right)\mathcal{B}_1 + \frac{\partial\eta}{\partial c}\mathcal{C}_1\right]\left[\frac{\partial\eta}{\partial a}(a'-a) + \left(1+\frac{\partial\eta}{\partial b}\right)(b'-b) + \frac{\partial\eta}{\partial c}(c'-c)\right]\\ & + \left[\frac{\partial\zeta}{\partial a}\mathcal{A}_1 + \frac{\partial\zeta}{\partial b}\mathcal{B}_1 + \left(1+\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right)\mathcal{C}_1\right]\left[\frac{\partial\zeta}{\partial a}(a'-a) + \frac{\partial\zeta}{\partial b}(b'-b) + \left(1+\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right)(c'-c)\right]\Big\}\end{aligned}$$

ou bien, en vertu des égalités (8),

$$\begin{aligned} X_1 = \sigma_1 \big\{ & [(1+2\varepsilon_1)\mathcal{A}_1 + \gamma_3\mathcal{B}_1 + \gamma_2\mathcal{C}_1](a'-a)\\ & + [\gamma_3\mathcal{A}_1 + (1+2\varepsilon_2)\mathcal{B}_1 + \gamma_1\mathcal{C}_1](b'-b)\\ & + [\gamma_2\mathcal{A}_1 + \gamma_1\mathcal{B}_1 + (1+2\varepsilon_3)\mathcal{C}_1](c'-c)\big\}\end{aligned}$$

ou enfin, en vertu des égalités (9) et (11), la première des égalités

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{\sigma_1}[\mathcal{A}_1(a'-a) + \mathcal{B}_1(b'-b) + \mathcal{C}_1(c'-c)],\\ X_2 &= \frac{1}{\sigma_2}[\mathcal{A}_2(a'-a) + \mathcal{B}_2(b'-b) + \mathcal{C}_2(c'-c)],\\ X_3 &= \frac{1}{\sigma_3}[\mathcal{A}_3(a'-a) + \mathcal{B}_3(b'-b) + \mathcal{C}_3(c'-c)].\end{aligned}$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

En comparant ces égalités aux égalités (16), nous trouvons

$$(17) \qquad X_1 = \frac{A_1}{\sigma_1}, \qquad X_2 = \frac{A_2}{\sigma_2}, \qquad X_3 = \frac{A_3}{\sigma_3}.$$

Donc, *pour passer de l'espace des* (a', b', c') *à l'espace des* (x', y', z'), *il est nécessaire et suffisant :*

1° *De donner au premier espace un déplacement d'ensemble qui vient appliquer les axes de l'ellipsoïde* E *sur les trois diamètres rectangulaires de la sphère* S *qui sont les transformées de ces axes;*

2° *De réduire respectivement dans les rapports* $\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \frac{1}{\sigma_3}$ *les coordonnées de chaque point rapportées à ce trièdre trirectangle.*

Revenons maintenant à la transformation la plus générale d'un milieu continu. A chaque point matériel occupant la position $\mu(a, b, c)$ dans l'état initial et la position $M(x, y, z)$ dans l'état déformé, on peut faire correspondre une déformation homographique analogue à celle que nous venons d'étudier. Si l'on néglige les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, cette déformation coïncide avec la déformation réelle qui se produit au sein d'une masse infiniment petite comprenant le point matériel considéré.

A cette masse est lié invariablement un certain trièdre trirectangle qui, dans l'état initial, coïncide avec les axes de l'ellipsoïde E relatif au point matériel considéré, et qui, dans l'état déformé, coïncide avec les trois diamètres de la sphère S, relative au même point, en lesquels se transforment les axes de l'ellipsoïde E. Ce trièdre est le trièdre des *axes de dilatation* relatifs au point matériel considéré.

L'étude complète de la déformation au voisinage d'un point matériel donné est achevée lorsque l'on connaît les valeurs des vingt et une quantités (13) et (15). Celles-ci, à leur tour, par les équations (8), (9), (10), (11), (12) et (14), dépendent des valeurs prises au point $\mu(a, b, c)$ par

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial\xi}{\partial a}, & \frac{\partial\xi}{\partial b}, & \frac{\partial\xi}{\partial c}, \\ \frac{\partial\eta}{\partial a}, & \frac{\partial\eta}{\partial b}, & \frac{\partial\eta}{\partial c}, \\ \frac{\partial\zeta}{\partial a}, & \frac{\partial\zeta}{\partial b}, & \frac{\partial\zeta}{\partial c}. \end{array}$$

Il peut arriver qu'une grandeur dépende seulement de la déformation proprement dite et nullement de l'orientation des axes de dilatation, soit au sein du milieu initial, soit au sein du milieu déformé. Cette grandeur sera alors une fonction symétrique de σ_1, σ_2, σ_3. En vertu de l'égalité (9), il revient au même de dire qu'elle est fonction symétrique des racines de l'équation (10) ou qu'elle est fonction rationnelle des coefficients de S^3, S^2, S, S^0 dans cette équation.

Développée, cette équation devient

$$(18) \quad S^3 - (3 + 2J_1)S^2 + (3 + 4J_1 + J_2)S - (1 + 2J_1 + J_2 + 2J_3) = 0,$$

en posant

$$(19) \quad \begin{cases} J_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ J_2 = 4(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2) - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2), \\ J_3 = 4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_1\gamma_1^2 - \varepsilon_2\gamma_2^2 - \varepsilon_3\gamma_3^2 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3. \end{cases}$$

Donc, *toute grandeur qui dépend uniquement de la déformation par laquelle on passe de l'état initial à l'état déformé, et nullement de l'orientation des axes de dilatation soit au sein du milieu initial, soit au sein du milieu déformé, est une fonction des trois seules grandeurs* J_1, J_2, J_3.

La signification mécanique du déterminant $\mathfrak{D}$ nous enseigne qu'il se trouve précisément dans ce cas; ce doit donc être une fonction des seules quantités J_1, J_2, J_3; en effet, si l'on part de l'expression de $\mathfrak{D}$ donnée par l'égalité (4 *bis*) et si l'on en forme le carré en tenant compte des égalités (8), on trouve

$$(20) \quad \mathfrak{D}^2 = \begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_1 & \gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 1 + 2\varepsilon_2 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 1 + 2\varepsilon_3 \end{vmatrix} = 1 + 2J_1 + J_2 + 2J_3.$$

Cette expression peut se trouver d'une autre manière.

Prenons, dans l'état initial, un parallélépipède rectangle infiniment petit dont $\mu\mu'$ soit la diagonale et dont les arêtes, dirigées suivant les axes de dilatation, soient A_1, A_2, A_3; son volume est $A_1 A_2 A_3$ et sa masse $\rho_0 A_1 A_2 A_3$, ρ_0 étant la densité au point μ dans l'état initial.

Dans l'état déformé, ce volume devient un nouveau parallélépipède rectangle, dont la diagonale est MM', et dont les arêtes, dirigées suivant les axes de dilatation, sont X_1, X_2, X_3; son volume est $X_1X_2X_3$ et sa masse $\rho X_1X_2X_3$, ρ étant la densité au point M dans l'état déformé.

La masse se conservant dans la déformation, on a

$$\rho X_1 X_2 X_3 = \rho_0 A_1 A_2 A_3$$

ou, selon les égalités (17),

$$\rho = \rho_0 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3.$$

En vertu des égalités (9), cette égalité devient

$$\rho^2 S_1 S_2 S_3 = \rho_0^2$$

ou bien, en vertu de l'égalité (18),

$$\rho^2(1 + 2J_1 + J_2 + 2J_3) = \rho_0^2. \tag{21}$$

Mais, d'autre part, on a l'égalité bien connue

$$\rho \mathfrak{D} = \rho_0. \tag{22}$$

Ces égalités (21) et (22) redonnent l'égalité (20).

II. — Variation infiniment petite d'une déformation finie [1].

Imaginons qu'à partir d'un état déjà déformé quelconque, nous imposions au système une modification, réelle ou virtuelle, infiniment petite. Nous aurons, en cette modification,

$$\delta x = \delta\xi, \qquad \delta y = \delta\eta, \qquad \delta z = \delta\zeta.$$

Supposons les quantités $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ données en fonctions de *a*, *b*, *c*.

---

[1] P. DUHEM, *Sur quelques formules de cinématique, utiles dans la théorie générale de l'élasticité* (*Comptes rendus*, t. CXXXVI, 19 janvier 1903, p. 139).

Les égalités (8) nous donneront

$$(23)\quad \begin{cases} \delta\varepsilon_1 = \left(1 + \dfrac{\partial\xi}{\partial a}\right)\dfrac{\partial\delta\xi}{\partial a} + \dfrac{\partial\eta}{\partial a}\dfrac{\partial\delta\eta}{\partial a} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial a}\dfrac{\partial\delta\zeta}{\partial a}, \\ \delta\gamma_1 = \dfrac{\partial\delta\eta}{\partial c} + \dfrac{\partial\delta\zeta}{\partial b} + \dfrac{\partial\xi}{\partial b}\dfrac{\partial\delta\xi}{\partial c} + \dfrac{\partial\xi}{\partial c}\dfrac{\partial\delta\xi}{\partial b} + \dfrac{\partial\eta}{\partial b}\dfrac{\partial\delta\eta}{\partial c} + \dfrac{\partial\eta}{\partial c}\dfrac{\partial\delta\eta}{\partial b} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial b}\dfrac{\partial\delta\zeta}{\partial c} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial c}\dfrac{\partial\delta\zeta}{\partial b}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

les points remplaçant quatre égalités qui se tirent des deux premières en permutant les lettres a, b, c.

La modification considérée peut être regardée comme un déplacement infiniment petit imposé au système déjà déplacé et déformé; selon la méthode de Cauchy, ce déplacement infiniment petit est défini, en chaque point, par trois translations, qui sont $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, trois rotations $\frac{1}{2}\omega_1$, $\frac{1}{2}\omega_2$, $\frac{1}{2}\omega_3$, trois dilatations D_1, D_2, D_3 et trois glissements G_1, G_2, G_3.

Si l'on suppose les grandeurs $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ exprimées en fonctions de x, y, z, on a

$$(24)\quad \begin{cases} D_1 = \dfrac{\partial\delta\xi}{\partial x}, & D_2 = \dfrac{\partial\delta\eta}{\partial y}, & D_3 = \dfrac{\partial\delta\zeta}{\partial z}, \\ 2G_1 = \dfrac{\partial\delta\zeta}{\partial y} + \dfrac{\partial\delta\eta}{\partial z}, & 2G_2 = \dfrac{\partial\delta\xi}{\partial z} + \dfrac{\partial\delta\zeta}{\partial x}, & 2G_3 = \dfrac{\partial\delta\eta}{\partial x} + \dfrac{\partial\delta\xi}{\partial y}, \\ \omega_1 = \dfrac{\partial\delta\zeta}{\partial y} - \dfrac{\partial\delta\eta}{\partial z}, & \omega_2 = \dfrac{\partial\delta\xi}{\partial z} - \dfrac{\partial\delta\zeta}{\partial x}, & \omega_3 = \dfrac{\partial\delta\eta}{\partial x} - \dfrac{\partial\delta\xi}{\partial y}. \end{cases}$$

Mais on a neuf égalités que l'on peut tirer de celle-ci :

$$(25)\quad \frac{\partial\delta\xi}{\partial x} = \frac{\partial\delta\xi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial\delta\xi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial\delta\xi}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}$$

en permutant entre elles les lettres x, y, z d'une part et les lettres ξ, η, ζ d'autre part; puis les égalités (5) donnent

$$(26)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial x} = \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{D(y,z)}{D(b,c)}, & \dfrac{\partial a}{\partial y} = \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{D(z,x)}{D(b,c)}, & \dfrac{\partial a}{\partial z} = \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{D(x,y)}{D(b,c)}, \\ \dfrac{\partial b}{\partial x} = \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{D(y,z)}{D(c,a)}, & \dfrac{\partial b}{\partial y} = \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{D(z,x)}{D(c,a)}, & \dfrac{\partial b}{\partial z} = \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{D(x,y)}{D(c,a)}, \\ \dfrac{\partial c}{\partial x} = \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{D(y,z)}{D(a,b)}, & \dfrac{\partial c}{\partial y} = \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{D(z,x)}{D(a,b)}, & \dfrac{\partial c}{\partial z} = \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{D(x,y)}{D(a,b)}. \end{cases}$$

Dans l'état déformé, ce volume devient un nouveau parallélépipède rectangle, dont la diagonale est MM', et dont les arêtes, dirigées suivant les axes de dilatation, sont X_1, X_2, X_3; son volume est $X_1X_2X_3$ et sa masse $\rho X_1X_2X_3$, ρ étant la densité au point M dans l'état déformé.

La masse se conservant dans la déformation, on a

$$\rho X_1X_2X_3 = \rho_0 A_1A_2A_3$$

ou, selon les égalités (17),

$$\rho = \rho_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

En vertu des égalités (9), cette égalité devient

$$\rho^2 S_1S_2S_3 = \rho_0^2$$

ou bien, en vertu de l'égalité (18),

$$\rho^2(1 + 2J_1 + J_2 + 2J_3) = \rho_0^2. \tag{21}$$

Mais, d'autre part, on a l'égalité bien connue

$$\rho \mathfrak{D} = \rho_0. \tag{22}$$

Ces égalités (21) et (22) redonnent l'égalité (20).

II. — Variation infiniment petite d'une déformation finie [1].

Imaginons qu'à partir d'un état déjà déformé quelconque, nous imposions au système une modification, réelle ou virtuelle, infiniment petite. Nous aurons, en cette modification,

$$\delta x = \delta\xi, \qquad \delta y = \delta\eta, \qquad \delta z = \delta\zeta.$$

Supposons les quantités $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ données en fonctions de a, b, c.

---

[1] P. Duhem, *Sur quelques formules de cinématique, utiles dans la théorie générale de l'élasticité* (*Comptes rendus*, t. CXXXVI, 19 janvier 1903, p. 139).

port à x, y, z, et nous trouverons

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta\varepsilon_1 &= \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^2 D_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2 D_2 + \left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)^2 D_3 + 2\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial a} G_1 + 2\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial a} G_2 + 2\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial a} G_3,\\
\delta\varepsilon_2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)^2 D_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)^2 D_2 + \left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)^2 D_3 + 2\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial b} G_1 + 2\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial b} G_2 + 2\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial b} G_3,\\
\delta\varepsilon_3 &= \left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)^2 D_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)^2 D_2 + \left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)^2 D_3 + 2\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial c} G_1 + 2\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial c} G_2 + 2\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial c} G_3,\\
\delta\gamma_1 &= 2\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} D_1 + 2\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} D_2 + 2\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} D_3\\
&\quad + 2\left(\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}\right) G_1 + 2\left(\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b}\right) G_2 + 2\left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b}\right) G_3,\\
\delta\gamma_2 &= 2\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a} D_1 + 2\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial a} D_2 + 2\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a} D_3\\
&\quad + 2\left(\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c}\right) G_1 + 2\left(\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial c}\right) G_2 + 2\left(\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial c}\right) G_3,\\
\delta\gamma_3 &= 2\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} D_1 + 2\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} D_2 + 2\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c} D_3\\
&\quad + 2\left(\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a}\right) G_1 + 2\left(\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a}\right) G_2 + 2\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}\right) G_3.
\end{aligned}\right.$$

Moyennant les égalités (2), on peut, si l'on veut, dans ces égalités (30), substituer les dérivées partielles des quantités ξ, η, ζ aux dérivées partielles des quantités x, y, z.

Aux axes rectangulaires considérés, substituons un nouveau système de coordonnées rectangulaires x', y', z'. Désignons le cosinus de l'angle formé par un axe ancien, l'axe des x, par exemple, et un axe nouveau, l'axe des x', par exemple, au moyen du symbole (x, x'). Au moyen de D_1, D_2, D_3, G_1, G_2, G_3, formons les expressions des trois dilatations D'_1, D'_2, D'_3 et des trois glissements G'_1, G'_2, G'_3 rapportés aux nouveaux axes.

Les composantes du déplacement virtuel suivant les nouveaux axes sont

$$\begin{aligned}
\delta\xi' &= (x, x')\,\delta\xi + (y, x')\,\delta\eta + (z, x')\,\delta\zeta,\\
\delta\eta' &= (x, y')\,\delta\xi + (y, y')\,\delta\eta + (z, y')\,\delta\zeta,\\
\delta\zeta' &= (x, z')\,\delta\xi + (y, z')\,\delta\eta + (z, z')\,\delta\zeta.
\end{aligned}$$

Les égalités (24), (25) et (26) donnent

$$(27)\quad \begin{cases} D_1 = \frac{1}{\varpi}\left[\frac{D(y,z)}{D(b,c)}\frac{\partial\delta\xi}{\partial a} + \frac{D(y,z)}{D(c,a)}\frac{\partial\delta\xi}{\partial b} + \frac{D(y,z)}{D(a,b)}\frac{\partial\delta\xi}{\partial c}\right], \\ \dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

$$(28)\quad \begin{cases} 2G_1 = \frac{1}{\varpi}\left[\frac{D(z,x)}{D(b,c)}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial a} + \frac{D(z,x)}{D(c,a)}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial b} + \frac{D(z,x)}{D(a,b)}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial c}\right. \\ \qquad\left. + \frac{D(x,y)}{D(b,c)}\frac{\partial\delta\eta}{\partial a} + \frac{D(x,y)}{D(c,a)}\frac{\partial\delta\eta}{\partial b} + \frac{D(x,y)}{D(a,b)}\frac{\partial\delta\eta}{\partial c}\right], \\ \dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

$$(29)\quad \begin{cases} \omega_1 = \frac{1}{\varpi}\left[\frac{D(z,x)}{D(b,c)}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial a} + \frac{D(z,x)}{D(c,a)}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial b} + \frac{D(z,x)}{D(a,b)}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial c}\right. \\ \qquad\left. - \frac{D(x,y)}{D(b,c)}\frac{\partial\delta\eta}{\partial a} - \frac{D(x,y)}{D(c,a)}\frac{\partial\delta\eta}{\partial b} - \frac{D(x,y)}{D(a,b)}\frac{\partial\delta\eta}{\partial c}\right], \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Dans chacun de ces trois groupes, les points remplacent deux égalités qui se déduisent de la première en permutant entre elles d'une part les lettres ξ, η, ζ, d'autre part les lettres x, y, z.

Des formules (29) on tire sans peine celles dont Cauchy a fait usage pour établir, en Hydrodynamique, le théorème de Lagrange et la conservation du mouvement tourbillonnaire.

Les six quantités $\delta\varepsilon_1$, $\delta\varepsilon_2$, $\delta\varepsilon_3$, $\delta\gamma_1$, $\delta\gamma_2$, $\delta\gamma_3$ s'expriment sans peine en fonctions linéaires et homogènes de D_1, D_2, D_3, G_1, G_2, G_3.

Les égalités (2) et (23) donnent

$$\delta\varepsilon_1 = \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial\delta\xi}{\partial c} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial\delta\eta}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial a},$$

$$\delta\gamma_1 = \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial\delta\xi}{\partial c} + \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial\delta\xi}{\partial b} + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial\delta\eta}{\partial c} + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial\delta\eta}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial b},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

Développons les dérivées partielles de $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ par rapport à a, b, c en fonctions des dérivées partielles des mêmes quantités par rap-

petite imposée au milieu déjà déformé, seront

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned}
\Delta_1 &= D_1\mathfrak{X}_1^2 + D_2\mathfrak{Y}_1^2 + D_3\mathfrak{Z}_1^2 + 2G_1\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Z}_1 + 2G_2\mathfrak{Z}_1\mathfrak{X}_1 + 2G_3\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_1,\\
\Delta_2 &= D_1\mathfrak{X}_2^2 + D_2\mathfrak{Y}_2^2 + D_3\mathfrak{Z}_2^2 + 2G_1\mathfrak{Y}_2\mathfrak{Z}_2 + 2G_2\mathfrak{Z}_2\mathfrak{X}_2 + 2G_3\mathfrak{X}_2\mathfrak{Y}_2,\\
\Delta_3 &= D_1\mathfrak{X}_3^2 + D_2\mathfrak{Y}_3^2 + D_3\mathfrak{Z}_3^2 + 2G_1\mathfrak{Y}_3\mathfrak{Z}_3 + 2G_2\mathfrak{Z}_3\mathfrak{X}_3 + 2G_3\mathfrak{X}_3\mathfrak{Y}_3,\\
\Gamma_1 &= \mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3D_1 + \mathfrak{Y}_2\mathfrak{Y}_3D_2 + \mathfrak{Z}_2\mathfrak{Z}_3D_3\\
&\quad + (\mathfrak{Z}_2\mathfrak{Y}_3 + \mathfrak{Y}_2\mathfrak{Z}_3)G_1 + (\mathfrak{X}_2\mathfrak{Z}_3 + \mathfrak{Z}_2\mathfrak{X}_3)G_2 + (\mathfrak{Y}_2\mathfrak{X}_3 + \mathfrak{X}_2\mathfrak{Y}_3)G_3,\\
\Gamma_2 &= \mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_1D_1 + \mathfrak{Y}_3\mathfrak{Y}_1D_2 + \mathfrak{Z}_3\mathfrak{Z}_1D_3\\
&\quad + (\mathfrak{Z}_3\mathfrak{Y}_1 + \mathfrak{Y}_3\mathfrak{Z}_1)G_1 + (\mathfrak{X}_3\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3\mathfrak{X}_1)G_2 + (\mathfrak{Y}_3\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_3\mathfrak{Y}_1)G_3,\\
\Gamma_3 &= \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2D_1 + \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}_2D_2 + \mathfrak{Z}_1\mathfrak{Z}_2D_3\\
&\quad + (\mathfrak{Z}_1\mathfrak{Y}_2 + \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Z}_2)G_1 + (\mathfrak{X}_1\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{Z}_1\mathfrak{X}_2)G_2 + (\mathfrak{Y}_1\mathfrak{X}_2 + \mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_2)G_3.
\end{aligned}\right.$$

Les six quantités Δ_1, Δ_2, Δ_3, Γ_1, Γ_2, Γ_3 sont des fonctions déterminées de a, b, c (ou de x, y, z) lorsque l'on connait, en fonctions des mêmes variables, les six quantités ξ, η, ζ, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$. Nous aurons souvent, par la suite, à considérer les six fonctions (33).

On peut se proposer de rechercher quelle variation subissent, au cours de la modification virtuelle considérée, les quantités σ_1, σ_2, σ_3 et comment se modifient les axes de dilatation soit au sein du milieu initial, soit au sein du milieu déformé.

Les égalités (19) donnent, en premier lieu,

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta J_1 &= \delta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2 + \delta\varepsilon_3,\\
\delta J_2 &= 4(\varepsilon_2+\varepsilon_3)\,\delta\varepsilon_1 + 4(\varepsilon_3+\varepsilon_1)\,\delta\varepsilon_2 + 4(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,\delta\varepsilon_3 - 2\gamma_1\,\delta\gamma_1 - 2\gamma_2\,\delta\gamma_2 - 2\gamma_3\,\delta\gamma_3,\\
\delta J_3 &= (4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \gamma_1^2)\,\delta\varepsilon_1 + (4\varepsilon_3\varepsilon_1 - \gamma_2^2)\,\delta\varepsilon_2 + (4\varepsilon_1\varepsilon_2 - \gamma_3^2)\,\delta\varepsilon_3\\
&\quad + (\gamma_2\gamma_3 - 2\varepsilon_1\gamma_1)\,\delta\gamma_1 + (\gamma_3\gamma_1 - 2\varepsilon_2\gamma_2)\,\delta\gamma_2 + (\gamma_1\gamma_2 - 2\varepsilon_3\gamma_3)\,\delta\gamma_3.
\end{aligned}\right.$$

L'égalité (18) donne alors

$$(35)\quad \begin{aligned}
&[3S^2 - (6 + 4J_1)S + (3 + 4J_1 + J_2)]\,\delta S\\
&\quad = 2(S-1)^2\,\delta J_1 - (S-1)\,\delta J_2 + 2\,\delta J_3.
\end{aligned}$$

Si, dans cette égalité, on remplace δJ_1, δJ_2, δJ_3 par leurs expressions (34) et si, ensuite, on substitue à S soit S_1, soit S_2, soit S_3, on obtient les expressions de δS_1, δS_2, δS_3 en fonctions linéaires et homogènes de $\delta\varepsilon_1$, $\delta\varepsilon_2$, $\delta\varepsilon_3$, $\delta\gamma_1$, $\delta\gamma_2$, $\delta\gamma_3$.

D'ailleurs, nous avons

$$D'_1 = \frac{\partial \delta \xi'}{\partial x'} = (x, x')\frac{\partial \delta \xi}{\partial x'} + (y, x')\frac{\partial \delta \eta}{\partial x'} + (z, x')\frac{\partial \delta \zeta}{\partial x'}$$

et

$$\frac{\partial \delta \xi}{\partial x'} = (x, x')\frac{\partial \delta \xi}{\partial x} + (y, x')\frac{\partial \delta \xi}{\partial y} + (z, x')\frac{\partial \delta \xi}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \delta \eta}{\partial x'} = (x, x')\frac{\partial \delta \eta}{\partial x} + (y, x')\frac{\partial \delta \eta}{\partial y} + (z, x')\frac{\partial \delta \eta}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \delta \zeta}{\partial x'} = (x, x')\frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} + (y, x')\frac{\partial \delta \zeta}{\partial y} + (z, x')\frac{\partial \delta \zeta}{\partial z}.$$

Ces égalités, jointes aux égalités (24), donnent la première égalité

$$(31) \begin{cases} D'_1 = (x, x')^2 D_1 + (y, x')^2 D_2 + (z, x')^2 D_3 \\ \qquad + 2(y, x')(z, x') G_1 + 2(z, x')(x, x') G_2 + 2(x, x')(y, x') G_3, \\ D'_2 = (x, y')^2 D_1 + (y, y')^2 D_2 + (z, y')^2 D_3 \\ \qquad + 2(y, y')(z, y') G_1 + 2(z, y')(x, y') G_2 + 2(x, y')(y, y') G_3, \\ D'_3 = (x, z')^2 D_1 + (y, z')^2 D_2 + (z, z')^2 D_3 \\ \qquad + 2(y, z')(z, z') G_1 + 2(z, z')(x, z') G_2 + 2(x, z')(y, z') G_3. \end{cases}$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

Une démonstration semblable à la précédente nous donnera les formules

$$(32) \begin{cases} 2G'_1 = 2(x, y')(x, z') D_1 + 2(y, y')(y, z') D_2 + 2(z, y')(z, z') D_3 \\ \qquad + 2[(z, y')(y, z') + (y, y')(z, z')] G_1 + 2[(x, y')(z, z') + (z, y')(x, z')] G_2 \\ \qquad\qquad + 2[(y, y')(x, z') + (x, y')(y, z')] G_3 \\ 2G'_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 2G'_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Les expressions de G'_2 et de G'_3 se tirent de l'expression de G'_1 en permutant entre elles les lettres x', y', z'.

Supposons, en particulier, que les nouveaux axes soient les axes de dilatation relatifs au point M du milieu déformé (x, y, z); rapportés à ces axes, les trois dilatations infiniment petites et les trois glissements infiniment petits qui correspondent à la variation infiniment

en la première des égalités

$$
(40)\quad \left\{
\begin{aligned}
\delta\mathfrak{X} &= \frac{\mathfrak{X}}{\sigma}\,\delta\sigma + \sigma\left[\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)\delta\mathcal{A} + \frac{\partial\xi}{\partial b}\,\delta\mathcal{B} + \frac{\partial\xi}{\partial c}\,\delta\mathcal{C}\right] \\
&\quad + \frac{1}{\sigma}\left(\mathfrak{X}\,\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial x} + \mathfrak{Y}\,\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial y} + \mathfrak{Z}\,\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial z}\right), \\
\delta\mathfrak{Y} &= \frac{\mathfrak{Y}}{\sigma}\,\delta\sigma + \sigma\left[\frac{\partial\eta}{\partial a}\,\delta\mathcal{A} + \left(1+\frac{\partial\eta}{\partial b}\right)\delta\mathcal{B} + \frac{\partial\eta}{\partial c}\,\delta\mathcal{C}\right] \\
&\quad + \frac{1}{\sigma}\left(\mathfrak{X}\,\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial x} + \mathfrak{Y}\,\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial y} + \mathfrak{Z}\,\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial z}\right), \\
\delta\mathfrak{Z} &= \frac{\mathfrak{Z}}{\sigma}\,\delta\sigma + \sigma\left(\frac{\partial\zeta}{\partial a}\,\delta\mathcal{A} + \frac{\partial\zeta}{\partial b}\,\delta\mathcal{B} + \frac{\partial\zeta}{\partial c}\,\delta\mathcal{C}\right) \\
&\quad + \frac{1}{\sigma}\left(\mathfrak{X}\,\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial x} + \mathfrak{Y}\,\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial y} + \mathfrak{Z}\,\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial z}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Au second membre de chacune de ces égalités, les deux premiers termes sont des fonctions linéaires et homogènes de $\delta\varepsilon_1$, $\delta\varepsilon_2$, $\delta\varepsilon_3$, $\delta\gamma_1$, $\delta\gamma_2$, $\delta\gamma_3$, mais il n'en est pas de même du troisième terme, qui ne se laisse point écrire sous cette forme.

CHAPITRE II.

ÉQUILIBRE ET MOUVEMENT D'UN CORPS VITREUX.

I. — Du potentiel interne d'un corps vitreux.

Considérons un système continu et divisons-le en masses infiniment petites; soient dm, dm' deux quelconques de ces masses. Le potentiel $\mathcal{F}$ de ce système peut toujours se mettre [1] sous la forme

$$
(41)\qquad \mathcal{F} = \int \Phi\, dm + \frac{1}{2}\int\int \Psi\, dm\, dm',
$$

[1] *Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. X, 1893, p. 183).

chacune des intégrations s'étendant à la masse entière du système et les grandeurs Φ et Ψ dépendant d'éléments variables qui ont été énumérés dans notre Mémoire *Sur le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique*.

Nous allons particulariser de la manière suivante la nature des systèmes que nous allons étudier.

Nous supposerons que l'on puisse toujours concevoir, pour chacun des milieux continus que nous aurons à considérer, un état où il serait homogène, où il aurait en tout point la même densité et où il serait *isotrope;* nous prendrons cet état pour *état initial.* Nous supposerons, en second lieu, que l'état d'une masse élémentaire dans un état déformé quelconque dépende de sa température absolue T et des trois grandeurs σ_1, σ_2, σ_3, *comptées à partir de l'état initial,* mais point de l'orientation des axes de dilatation en l'état déformé.

Quand un milieu remplira ces conditions, nous dirons que c'est un *milieu vitreux;* un milieu non vitreux sera dit *milieu cristallisé.*

En un milieu vitreux, la fonction Φ, qui est une fonction de l'état de la masse dm, *y compris sa température absolue,* dépendra de T et des grandeurs $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ relatives à un point de la masse dm, sans dépendre de l'orientation des axes de dilatation au sein de la masse dm. Dès lors, selon ce qui a été vu au Chapitre I, § I, elle dépendra de T et des valeurs de J_1, J_2, J_3 en un point de la masse dm :

$$\Phi = \Phi(T, J_1, J_2, J_3). \tag{42}$$

Quant à la fonction Ψ, elle ne peut pas dépendre des températures T, T' des éléments dm, dm', mais elle peut dépendre :

1° Des grandeurs σ_1, σ_2, σ_3 relatives à l'élément dm, et cela d'une manière symétrique, partant des valeurs J_1, J_2, J_3 relatives à un point de cet élément;

2° Des grandeurs σ'_1, σ'_2, σ'_3 relatives à l'élément dm', partant des valeurs J'_1, J'_2, J'_3 relatives à un point de cet élément;

3° De la distance r d'un point de l'élément dm à un point de l'élément dm';

4° De l'orientation mutuelle des axes de dilatation de l'élément dm et des axes de dilatation de l'élément dm'.

Cette orientation est définie par les neuf cosinus dont on obtient les

valeurs en prenant l'expression

$$(i, j') = \mathfrak{X}_i \mathfrak{X}'_j + \mathfrak{Y}_i \mathfrak{Y}'_j + \mathfrak{Z}_i \mathfrak{Z}'_j,$$

et en y remplaçant de toutes les manières possibles l'indice i, d'une part, et l'indice j', d'autre part, par chacun des indices 1, 2, 3;

5° De l'orientation de la droite de jonction r des deux éléments par rapport aux axes de dilatation du premier élément; cette orientation est définie par les trois cosinus

$$(r, 1) = \frac{x'-x}{r}\mathfrak{X}_1 + \frac{y'-y}{r}\mathfrak{Y}_1 + \frac{z'-z}{r}\mathfrak{Z}_1,$$
$$(r, 2) = \frac{x'-x}{r}\mathfrak{X}_2 + \frac{y'-y}{r}\mathfrak{Y}_2 + \frac{z'-z}{r}\mathfrak{Z}_2,$$
$$(r, 3) = \frac{x'-x}{r}\mathfrak{X}_3 + \frac{y'-y}{r}\mathfrak{Y}_3 + \frac{z'-z}{r}\mathfrak{Z}_3;$$

6° De l'orientation de la droite de jonction r des deux éléments par rapport aux axes de dilatation du second élément; cette orientation est définie par les trois cosinus

$$(r', 1') = \frac{x-x'}{r}\mathfrak{X}'_1 + \frac{y-y'}{r}\mathfrak{Y}'_1 + \frac{z-z'}{r}\mathfrak{Z}'_1,$$
$$(r', 2') = \frac{x-x'}{r}\mathfrak{X}'_2 + \frac{y-y'}{r}\mathfrak{Y}'_2 + \frac{z-z'}{r}\mathfrak{Z}'_2,$$
$$(r', 3') = \frac{x-x'}{r}\mathfrak{X}'_3 + \frac{y-y'}{r}\mathfrak{Y}'_3 + \frac{z-z'}{r}\mathfrak{Z}'_3.$$

En résumé, Ψ peut dépendre des variables suivantes :

$$(43) \qquad \begin{cases} J_1, \quad J_2, \quad J_3, \qquad J'_1, \quad J'_2, \quad J'_3, \\ \mathfrak{X}_i, \quad \mathfrak{Y}_i, \quad \mathfrak{Z}_i, \qquad \mathfrak{X}'_i, \quad \mathfrak{Y}'_i, \quad \mathfrak{Z}'_i, \\ (x'-x), \quad (y'-y), \quad (z'-z). \end{cases}$$

Un cas très simple est celui où les actions mutuelles entre éléments du milieu sont *newtoniennes;* on a alors simplement

$$(44) \qquad \Psi = \Psi(r).$$

chacune des intégrations s'étendant à la masse entière du système et les grandeurs Φ et Ψ dépendant d'éléments variables qui ont été énumérés dans notre Mémoire *Sur le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique*.

Nous allons particulariser de la manière suivante la nature des systèmes que nous allons étudier.

Nous supposerons que l'on puisse toujours concevoir, pour chacun des milieux continus que nous aurons à considérer, un état où il serait homogène, où il aurait en tout point la même densité et où il serait *isotrope;* nous prendrons cet état pour *état initial.* Nous supposerons, en second lieu, que l'état d'une masse élémentaire dans un état déformé quelconque dépende de sa température absolue T et des trois grandeurs σ_1, σ_2, σ_3, *comptées à partir de l'état initial,* mais point de l'orientation des axes de dilatation en l'état déformé.

Quand un milieu remplira ces conditions, nous dirons que c'est un *milieu vitreux;* un milieu non vitreux sera dit *milieu cristallisé.*

En un milieu vitreux, la fonction Φ, qui est une fonction de l'état de la masse *dm, y compris sa température absolue,* dépendra de T et des grandeurs σ_1, σ_2, σ_3 relatives à un point de la masse *dm*, sans dépendre de l'orientation des axes de dilatation au sein de la masse *dm.* Dès lors, selon ce qui a été vu au Chapitre I, § I, elle dépendra de T et des valeurs de J_1, J_2, J_3 en un point de la masse *dm* :

$$\Phi = \Phi(T, J_1, J_2, J_3). \tag{42}$$

Quant à la fonction Ψ, elle ne peut pas dépendre des températures T, T′ des éléments *dm, dm′*, mais elle peut dépendre :

1° Des grandeurs σ_1, σ_2, σ_3 relatives à l'élément *dm*, et cela d'une manière symétrique, partant des valeurs J_1, J_2, J_3 relatives à un point de cet élément;

2° Des grandeurs σ'_1, σ'_2, σ'_3 relatives à l'élément *dm′*, partant des valeurs J'_1, J'_2, J'_3 relatives à un point de cet élément;

3° De la distance *r* d'un point de l'élément *dm* à un point de l'élément *dm′*;

4° De l'orientation mutuelle des axes de dilatation de l'élément *dm* et des axes de dilatation de l'élément *dm′*.

Cette orientation est définie par les neuf cosinus dont on obtient les

riables (43), se mettre sous la forme

$$\delta\Psi = A + A' + B + B' + C + C'. \tag{47}$$

Les termes A, B, C sont les suivants :

$$A = \frac{\partial\Psi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\delta z = \frac{\partial\Psi}{\partial x}\delta\xi + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\delta\eta + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\delta\zeta, \tag{48}$$

$$\begin{aligned} B = \sum_{i=1,2,3} \Bigg[& \frac{\partial\Psi}{\partial\mathfrak{X}_j}\frac{1}{\sigma_j}\left(\mathfrak{X}_j\frac{\partial\delta\xi}{\partial x} + \mathfrak{Y}_i\frac{\partial\delta\xi}{\partial y} + \mathfrak{Z}_i\frac{\partial\delta\xi}{\partial z}\right) \\ & + \frac{\partial\Psi}{\partial\mathfrak{Y}_j}\frac{1}{\sigma_j}\left(\mathfrak{X}_j\frac{\partial\delta\eta}{\partial x} + \mathfrak{Y}_j\frac{\partial\delta\eta}{\partial y} + \mathfrak{Z}_j\frac{\partial\delta\eta}{\partial z}\right) \\ & + \frac{\partial\Psi}{\partial\mathfrak{Z}_j}\frac{1}{\sigma_j}\left(\mathfrak{X}_j\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x} + \mathfrak{Y}_j\frac{\partial\delta\zeta}{\partial y} + \mathfrak{Z}_j\frac{\partial\delta\zeta}{\partial z}\right)\Bigg], \end{aligned} \tag{49}$$

$$C = \psi_1\delta\varepsilon_1 + \psi_2\delta\varepsilon_2 + \psi_3\delta\varepsilon_3 + \chi_1\delta\gamma_1 + \chi_2\delta\gamma_2 + \chi_3\delta\gamma_3, \tag{50}$$

ψ_1, ψ_2, ψ_3, χ_1, χ_2, χ_3 étant des quantités dont les valeurs dépendent des valeurs prises, à l'instant t, par ξ, η, ζ et leurs neuf dérivées par rapport à x, y, z, en un point (x, y, z) de l'élément dm et des valeurs prises au même instant, par les mêmes quantités, en un point x', y', z' de l'élément dm'.

Les termes A', B', C' se tirent respectivement des termes A, B, C en intervertissant les rôles des deux éléments dm et dm'.

On voit alors que l'on a

$$\delta\int\int\Psi\,dm'\,dm = 2\int\int(A + B + C)\,dm'\,dm. \tag{51}$$

Posons

$$\left\{\begin{aligned} X_i &= -\int\frac{\partial\Psi}{\partial x}dm', & Y_i &= -\int\frac{\partial\Psi}{\partial y}dm', & Z_i &= -\int\frac{\partial\Psi}{\partial z}dm', \\ L_{1i} &= -\int\frac{\partial\Psi}{\partial\mathfrak{X}_1}dm', & M_{1i} &= -\int\frac{\partial\Psi}{\partial\mathfrak{Y}_1}dm', & N_{1i} &= -\int\frac{\partial\Psi}{\partial\mathfrak{Z}_1}dm', \\ L_{2i} &= -\int\frac{\partial\Psi}{\partial\mathfrak{X}_2}dm', & M_{2i} &= -\int\frac{\partial\Psi}{\partial\mathfrak{Y}_2}dm', & N_{2i} &= -\int\frac{\partial\Psi}{\partial\mathfrak{Z}_2}dm', \\ L_{3i} &= -\int\frac{\partial\Psi}{\partial\mathfrak{X}_3}dm', & M_{3i} &= -\int\frac{\partial\Psi}{\partial\mathfrak{Y}_3}dm', & N_{3i} &= -\int\frac{\partial\Psi}{\partial\mathfrak{Z}_3}dm', \\ \mathcal{E}_{1i} &= -\int\psi_1\,dm', & \mathcal{E}_{2i} &= -\int\psi_2\,dm', & \mathcal{E}_{3i} &= -\int\psi_3\,dm', \\ \mathcal{G}_{1i} &= -\int\chi_1\,dm', & \mathcal{G}_{2i} &= -\int\chi_2\,dm', & \mathcal{G}_{3i} &= -\int\chi_3\,dm'. \end{aligned}\right. \tag{52}$$

II. — Variation virtuelle du potentiel interne.

Posons, en général,

$$(45)\quad \begin{cases} e_1 = -\dfrac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}, & e_2 = -\dfrac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}, & e_3 = -\dfrac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}, \\ g_1 = -\dfrac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}, & g_2 = -\dfrac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2}, & g_3 = -\dfrac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3}, \end{cases}$$

égalités qui, en vertu des égalités (34) et (42), deviendront, pour un milieu vitreux,

$$(45\ bis)\quad \begin{cases} e_1 = -\dfrac{\partial\Phi}{\partial J_1} - 4(\varepsilon_2+\varepsilon_3)\dfrac{\partial\Phi}{\partial J_2} - (4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \gamma_1^2)\dfrac{\partial\Phi}{\partial J_3}, \\ e_2 = -\dfrac{\partial\Phi}{\partial J_1} - 4(\varepsilon_3+\varepsilon_1)\dfrac{\partial\Phi}{\partial J_2} - (4\varepsilon_3\varepsilon_1 - \gamma_2^2)\dfrac{\partial\Phi}{\partial J_3}, \\ e_3 = -\dfrac{\partial\Phi}{\partial J_1} - 4(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\dfrac{\partial\Phi}{\partial J_2} - (4\varepsilon_1\varepsilon_2 - \gamma_3^2)\dfrac{\partial\Phi}{\partial J_3}, \\ g_1 = 2\gamma_1\dfrac{\partial\Phi}{\partial J_2} - (2\varepsilon_1\gamma_1 - \gamma_2\gamma_3)\dfrac{\partial\Phi}{\partial J_3}, \\ g_2 = 2\gamma_2\dfrac{\partial\Phi}{\partial J_2} - (2\varepsilon_2\gamma_2 - \gamma_3\gamma_1)\dfrac{\partial\Phi}{\partial J_3}, \\ g_3 = 2\gamma_3\dfrac{\partial\Phi}{\partial J_2} - (2\varepsilon_3\gamma_3 - \gamma_1\gamma_2)\dfrac{\partial\Phi}{\partial J_3}. \end{cases}$$

Ces six quantités $e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3$ ont des valeurs déterminées, au point (x, y, z) et à l'instant t, lorsque l'on connaît seulement les valeurs, en ce point et à cet instant, de la température T et des six quantités

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3, \qquad \gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \gamma_3.$$

En vertu des égalités (45), la variation virtuelle la plus générale de Φ est

$$(46)\quad -\delta\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial T}\,\delta T + e_1\,\delta\varepsilon_1 + e_2\,\delta\varepsilon_2 + e_3\,\delta\varepsilon_3 + g_1\,\delta\gamma_1 + g_2\,\delta\gamma_2 + g_3\,\delta\gamma_3.$$

La variation virtuelle la plus générale de Ψ peut, en se rappelant ce que nous avons dit au Chapitre I au sujet des variations des va-

Dans ce cas, en effet, si l'on pose

$$(54)\qquad \begin{cases} X_i = -\int \dfrac{d\Psi(r)}{dr}\dfrac{\partial r}{\partial x}\,dm', \\ Y_i = -\int \dfrac{d\Psi(r)}{dr}\dfrac{\partial r}{\partial y}\,dm', \\ Z_i = -\int \dfrac{d\Psi(r)}{dr}\dfrac{\partial r}{\partial z}\,dm', \end{cases}$$

l'égalité (44) donne simplement

$$(55)\qquad \frac{1}{2}\,\delta\int\int \Psi\,dm'\,dm = -\int (X_i\,\delta\xi + Y_i\,\delta\eta + Z_i\,\delta\zeta)\,dm.$$

III. — Travail des actions extérieures.

Nous admettrons que le travail virtuel $d\mathfrak{T}_e$ des actions extérieures se compose de deux termes

$$(56)\qquad d\mathfrak{T}_e = d\mathfrak{T}'_e + d\mathfrak{T}''_e.$$

Le premier est le travail de pressions appliquées en chaque point de la surface S qui limite le système dans son état actuel de déformation

$$(57)\qquad \begin{cases} d\mathfrak{T}'_e = \int (P_x\,\delta x + P_y\,\delta y + P_z\,\delta z)\,dS, \\ \phantom{d\mathfrak{T}'_e} = \int (P_x\,\delta\xi + P_y\,\delta\eta + P_z\,\delta\zeta)\,dS. \end{cases}$$

Le second provient d'actions exercées sur chacun des éléments de masse du milieu, actions analogues à celles que ces éléments exercent les uns sur les autres. L'expression de ce travail sera donc de la forme

$$(58)\qquad \begin{aligned} d\mathfrak{T}''_e = & \int (X_e\,\delta\xi + Y_e\,\delta\eta + Z_e\,\delta\zeta)\,dm \\ & + \int \left[\left(\frac{L_{1e}\mathfrak{X}_1}{\sigma_1} + \frac{L_{2e}\mathfrak{X}_2}{\sigma_2} + \frac{L_{3e}\mathfrak{X}_3}{\sigma_3}\right)\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial x} + \ldots\right] dm \\ & + \int (\mathfrak{E}_{1e}\,\delta\varepsilon_1 + \mathfrak{E}_{2e}\,\delta\varepsilon_2 + \mathfrak{E}_{3e}\,\delta\varepsilon_3 + \mathfrak{G}_{1e}\,\delta\gamma_1 + \mathfrak{G}_{2e}\,\delta\gamma_2 + \mathfrak{G}_{3e}\,\delta\gamma_3)\,dm. \end{aligned}$$

Dans le cas où les actions extérieures sont *newtoniennes*, ce terme se réduit à

$$d\mathcal{T}''_e = \int (X_e\,\delta\xi + Y_e\,\delta\eta + Z_e\,\delta\zeta)\,dm. \tag{59}$$

Les diverses égalités que nous venons d'écrire nous fournissent, pour toute modification *isothermique* virtuelle, l'expression de

$$d\mathcal{T}_e - \delta\mathcal{F}.$$

Posons

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\mathcal{L}_x &= \frac{\mathcal{X}_1}{\sigma_1}(L_{1i}+L_{1e}) + \frac{\mathcal{X}_2}{\sigma_2}(L_{2i}+L_{2e}) + \frac{\mathcal{X}_3}{\sigma_3}(L_{3i}+L_{3e}),\\
\frac{1}{\rho}\mathcal{L}_y &= \frac{\mathcal{Y}_1}{\sigma_1}(L_{1i}+L_{1e}) + \frac{\mathcal{Y}_2}{\sigma_2}(L_{2i}+L_{2e}) + \frac{\mathcal{Y}_3}{\sigma_3}(L_{3i}+L_{3e}),\\
\frac{1}{\rho}\mathcal{L}_z &= \frac{\mathcal{Z}_1}{\sigma_1}(L_{1i}+L_{1e}) + \frac{\mathcal{Z}_2}{\sigma_2}(L_{2i}+L_{2e}) + \frac{\mathcal{Z}_3}{\sigma_3}(L_{3i}+L_{3e}),\\
\frac{1}{\rho}\mathcal{M}_x &= \frac{\mathcal{X}_1}{\sigma_1}(M_{1i}+M_{1e}) + \frac{\mathcal{X}_2}{\sigma_2}(M_{2i}+M_{2e}) + \frac{\mathcal{X}_3}{\sigma_3}(M_{3i}+M_{3e}),\\
\frac{1}{\rho}\mathcal{M}_y &= \frac{\mathcal{Y}_1}{\sigma_1}(M_{1i}+M_{1e}) + \frac{\mathcal{Y}_2}{\sigma_2}(M_{2i}+M_{2e}) + \frac{\mathcal{Y}_3}{\sigma_3}(M_{3i}+M_{3e}),\\
\frac{1}{\rho}\mathcal{M}_z &= \frac{\mathcal{Z}_1}{\sigma_1}(M_{1i}+M_{1e}) + \frac{\mathcal{Z}_2}{\sigma_2}(M_{2i}+M_{2e}) + \frac{\mathcal{Z}_3}{\sigma_3}(M_{3i}+M_{3e}),\\
\frac{1}{\rho}\mathcal{N}_x &= \frac{\mathcal{X}_1}{\sigma_1}(N_{1i}+N_{1e}) + \frac{\mathcal{X}_2}{\sigma_2}(N_{2i}+N_{2e}) + \frac{\mathcal{X}_3}{\sigma_3}(N_{3i}+N_{3e}),\\
\frac{1}{\rho}\mathcal{N}_y &= \frac{\mathcal{Y}_1}{\sigma_1}(N_{1i}+N_{1e}) + \frac{\mathcal{Y}_2}{\sigma_2}(N_{2i}+N_{2e}) + \frac{\mathcal{Y}_3}{\sigma_3}(N_{3i}+N_{3e}),\\
\frac{1}{\rho}\mathcal{N}_z &= \frac{\mathcal{Z}_1}{\sigma_1}(N_{1i}+N_{1e}) + \frac{\mathcal{Z}_2}{\sigma_2}(N_{2i}+N_{2e}) + \frac{\mathcal{Z}_3}{\sigma_3}(N_{3i}+N_{3e}).
\end{aligned}\right.$$

Posons également

$$(61)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathcal{E}_1 = e_1 + \mathcal{E}_{1i} + \mathcal{E}_{2e}, &&\mathcal{E}_2 = e_2 + \mathcal{E}_{2i} + \mathcal{E}_{2e}, &&\mathcal{E}_3 = e_3 + \mathcal{E}_{3i} + \mathcal{E}_{3e},\\
&\mathcal{G}_1 = g_1 + \mathcal{G}_{1i} + \mathcal{G}_{1e}, &&\mathcal{G}_2 = g_2 + \mathcal{G}_{2i} + \mathcal{G}_{2e}, &&\mathcal{G}_3 = g_3 + \mathcal{G}_{3i} + \mathcal{G}_{3e},
\end{aligned}\right.$$

puis

$$
(62)\quad\left\{
\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\mathrm{N}_x &= \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^2\mathcal{E}_1 + \left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)^2\mathcal{E}_2 + \left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)^2\mathcal{E}_3 + 2\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c}\mathcal{G}_1 + 2\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a}\mathcal{G}_2 + 2\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b}\mathcal{G}_3,\\
\frac{1}{\rho}\mathrm{N}_y &= \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2\mathcal{E}_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)^2\mathcal{E}_2 + \left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)^2\mathcal{E}_3 + 2\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c}\mathcal{G}_1 + 2\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial a}\mathcal{G}_2 + 2\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}\mathcal{G}_3,\\
\frac{1}{\rho}\mathrm{N}_z &= \left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)^2\mathcal{E}_1 + \left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)^2\mathcal{E}_2 + \left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)^2\mathcal{E}_3 + 2\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}\mathcal{G}_1 + 2\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a}\mathcal{G}_2 + 2\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b}\mathcal{G}_3,\\
\frac{1}{\rho}\mathrm{T}_x &= \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial a}\mathcal{E}_1 + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial b}\mathcal{E}_2 + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial c}\mathcal{E}_3 + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}\right)\mathcal{G}_1\\
&\quad + \left(\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c}\right)\mathcal{G}_2 + \left(\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a}\right)\mathcal{G}_3,\\
\frac{1}{\rho}\mathrm{T}_y &= \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial a}\mathcal{E}_1 + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial b}\mathcal{E}_2 + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial c}\mathcal{E}_3 + \left(\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b}\right)\mathcal{G}_1\\
&\quad + \left(\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial c}\right)\mathcal{G}_2 + \left(\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a}\right)\mathcal{G}_3,\\
\frac{1}{\rho}\mathrm{T}_z &= \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial a}\mathcal{E}_1 + \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial b}\mathcal{E}_2 + \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial c}\mathcal{E}_3 + \left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b}\right)\mathcal{G}_1\\
&\quad + \left(\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial c}\right)\mathcal{G}_2 + \left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}\right)\mathcal{G}_3.
\end{aligned}\right.
$$

En vertu des égalités (30), ces égalités (61) et (62) nous donneront

$$
(63)\quad
\begin{aligned}
&[\,(e_1 + \mathcal{E}_{1i} + \mathcal{E}_{1e})\delta\varepsilon_1 + (e_2 + \mathcal{E}_{2i} + \mathcal{E}_{2e})\delta\varepsilon_2 + (e_3 + \mathcal{E}_{3i} + \mathcal{E}_{3e})\delta\varepsilon_3\\
&\quad + (g_1 + \mathcal{G}_{1i} + \mathcal{G}_{1e})\delta\gamma_1 + (g_2 + \mathcal{G}_{2i} + \mathcal{G}_{2e})\delta\gamma_2 + (g_3 + \mathcal{G}_{3i} + \mathcal{G}_{3e})\delta\gamma_3]\,dm\\
&= [\mathrm{N}_x\mathrm{D}_1 + \mathrm{N}_y\mathrm{D}_2 + \mathrm{N}_z\mathrm{D}_3 + 2\mathrm{T}_x\mathrm{G}_1 + 2\mathrm{T}_y\mathrm{G}_2 + 2\mathrm{T}_z\mathrm{G}_3]\,d\varpi,
\end{aligned}
$$

$d\varpi$ étant le volume de l'élément dm.

Arrêtons-nous un instant à cette égalité et aux égalités (61) et (62).

Si les actions, tant intérieures qu'extérieures, sont *newtoniennes*, les quantités $\mathcal{E}$ et $\mathcal{G}$ sont nulles; les grandeurs e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3 dépendent exclusivement de la température T au point x, y, z et des valeurs de ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 au même point; celles-ci s'expriment, selon les égalités (8), en fonctions des dérivées partielles de ξ, η, ζ par rapport à a, b, c, au point considéré; il en est de même, selon les égalités (2), de $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial x}{\partial b}$, ... Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Si les actions, tant intérieures qu'extérieures, auxquelles sont soumis

les divers éléments du système, sont newtoniennes, les valeurs de N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z, *en chaque point et à chaque instant, s'expriment par les équations* (62) *en fonctions des valeurs de*

$$T,$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial a},\quad \frac{\partial\xi}{\partial b},\quad \frac{\partial\xi}{\partial c},$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial a},\quad \frac{\partial\eta}{\partial b},\quad \frac{\partial\eta}{\partial c},$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial a},\quad \frac{\partial\zeta}{\partial b},\quad \frac{\partial\zeta}{\partial c},$$

au même point et au même instant.

Cette proposition n'est plus vraie lorsque les actions extérieures ou intérieures ne sont plus newtoniennes, car les quantités $\mathcal{E}$ et $\mathcal{G}$ dépendent alors non seulement de la déformation au voisinage du point considéré, mais encore de l'état de tout le système et des corps extérieurs à l'instant t.

Dans ce cas général, les équations (41), (46), (53), (57), (58), (60), (61), (62) et (24) permettent d'écrire

$$(64)\quad \begin{aligned} d\mathfrak{T}_e - \delta_T \mathfrak{F} = & \int (P_x\,\delta\xi + P_y\,\delta\eta + P_z\,\delta\zeta)\,dS \\ & + \int [(X_i + X_e)\,\delta\xi + (Y_i + Y_e)\,\delta\eta + (Z_i + Z_e)\,\delta\zeta]\,dm \\ & + \int \Big(\mathfrak{L}_x \frac{\partial\delta\xi}{\partial x} + \mathfrak{L}_y \frac{\partial\delta\zeta}{\partial y} + \mathfrak{L}_z \frac{\partial\delta\zeta}{\partial z} \\ & \qquad + \mathfrak{M}_x \frac{\partial\delta\eta}{\partial x} + \mathfrak{M}_y \frac{\partial\delta\eta}{\partial y} + \mathfrak{M}_z \frac{\partial\delta\eta}{\partial z} \\ & \qquad + \mathfrak{N}_x \frac{\partial\delta\zeta}{\partial x} + \mathfrak{N}_y \frac{\partial\delta\zeta}{\partial y} + \mathfrak{N}_z \frac{\partial\delta\zeta}{\partial z} \Big)\,d\varpi \\ & + \int \Big[N_x \frac{\partial\delta\xi}{\partial x} + N_y \frac{\partial\delta\eta}{\partial y} + N_z \frac{\partial\delta\zeta}{\partial z} \\ & \qquad + T_x\left(\frac{\partial\delta\eta}{\partial z} + \frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\right) + T_y\left(\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\delta\xi}{\partial z}\right) + T_z\left(\frac{\partial\delta\xi}{\partial y} + \frac{\partial\delta\eta}{\partial x}\right)\Big]\,d\varpi. \end{aligned}$$

puis

$$
(62)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\mathrm{N}_x &= \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^2 \mathcal{E}_1 + \left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)^2 \mathcal{E}_2 + \left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)^2 \mathcal{E}_3 + 2\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c}\mathcal{G}_1 + 2\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a}\mathcal{G}_2 + 2\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b}\mathcal{G}_3,\\
\frac{1}{\rho}\mathrm{N}_y &= \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2 \mathcal{E}_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)^2 \mathcal{E}_2 + \left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)^2 \mathcal{E}_3 + 2\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c}\mathcal{G}_1 + 2\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial a}\mathcal{G}_2 + 2\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}\mathcal{G}_3,\\
\frac{1}{\rho}\mathrm{N}_z &= \left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)^2 \mathcal{E}_1 + \left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)^2 \mathcal{E}_2 + \left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)^2 \mathcal{E}_3 + 2\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}\mathcal{G}_1 + 2\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a}\mathcal{G}_2 + 2\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b}\mathcal{G}_3,\\
\frac{1}{\rho}\mathrm{T}_x &= \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial a}\mathcal{E}_1 + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial b}\mathcal{E}_2 + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial c}\mathcal{E}_3 + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}\right)\mathcal{G}_1\\
&\quad + \left(\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c}\right)\mathcal{G}_2 + \left(\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a}\right)\mathcal{G}_3,\\
\frac{1}{\rho}\mathrm{T}_y &= \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial a}\mathcal{E}_1 + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial b}\mathcal{E}_2 + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial c}\mathcal{E}_3 + \left(\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b}\right)\mathcal{G}_1\\
&\quad + \left(\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial c}\right)\mathcal{G}_2 + \left(\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a}\right)\mathcal{G}_3,\\
\frac{1}{\rho}\mathrm{T}_z &= \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial a}\mathcal{E}_1 + \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial b}\mathcal{E}_2 + \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial c}\mathcal{E}_3 + \left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b}\right)\mathcal{G}_1\\
&\quad + \left(\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial c}\right)\mathcal{G}_2 + \left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}\right)\mathcal{G}_3.
\end{aligned}
\right.
$$

En vertu des égalités (30), ces égalités (61) et (62) nous donneront

$$
(63)\quad
\begin{aligned}
&[(e_1 + \mathcal{E}_{1i} + \mathcal{E}_{1e})\delta\varepsilon_1 + (e_2 + \mathcal{E}_{2i} + \mathcal{E}_{2e})\delta\varepsilon_2 + (e_3 + \mathcal{E}_{3i} + \mathcal{E}_{3e})\delta\varepsilon_3\\
&\quad + (g_1 + \mathcal{G}_{1i} + \mathcal{G}_{1e})\delta\gamma_1 + (g_2 + \mathcal{G}_{2i} + \mathcal{G}_{2e})\delta\gamma_2 + (g_3 + \mathcal{G}_{3i} + \mathcal{G}_{3e})\delta\gamma_3]\,dm\\
&= [\mathrm{N}_x \mathrm{D}_1 + \mathrm{N}_y \mathrm{D}_2 + \mathrm{N}_z \mathrm{D}_3 + 2\mathrm{T}_x \mathrm{G}_1 + 2\mathrm{T}_y \mathrm{G}_2 + 2\mathrm{T}_z \mathrm{G}_3]\,d\varpi,
\end{aligned}
$$

$d\varpi$ étant le volume de l'élément dm.

Arrêtons-nous un instant à cette égalité et aux égalités (61) et (62).

Si les actions, tant intérieures qu'extérieures, sont *newtoniennes*, les quantités $\mathcal{E}$ et $\mathcal{G}$ sont nulles; les grandeurs e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3 dépendent exclusivement de la température T au point x, y, z et des valeurs de ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 au même point; celles-ci s'expriment, selon les égalités (8), en fonctions des dérivées partielles de ξ, η, ζ par rapport à a, b, c, au point considéré; il en est de même, selon les égalités (2), de $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial x}{\partial b}$, ... Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Si les actions, tant intérieures qu'extérieures, auxquelles sont soumis

rieur du milieu étudié, on peut remplacer l'égalité (66) par

$$
\begin{aligned}
(67)\quad d\mathfrak{T}_e - \delta_T \mathfrak{F} = \int \Big\{ & [P_x - (N_x + \mathcal{L}_x)\alpha - (T_z + \mathfrak{T}_z)\beta - (T_y + \mathfrak{T}_y)\gamma \\
& \qquad - (\mathcal{R}_y\gamma - \mathcal{R}_z\beta)]\,\delta\xi \\
& + [P_y - (T_z + \mathfrak{T}_z)\alpha - (N_y + \mathcal{M}_y)\beta - (T_x + \mathfrak{T}_x)\gamma \\
& \qquad - (\mathcal{R}_z\alpha - \mathcal{R}_x)\gamma]\,\delta\eta \\
& + [P_z - (T_y + \mathfrak{T}_y)\alpha - (T_x + \mathfrak{T}_x)\beta - (N_z + \mathcal{N}_z)\gamma \\
& \qquad - (\mathcal{R}_x\beta - \mathcal{R}_y\alpha)]\,\delta\zeta \Big\}\, dS \\
+ \int \Big\{ & \left[\rho(X_i + X_e) - \frac{\partial(N_x + \mathcal{L}_x)}{\partial x} - \frac{\partial(T_z + \mathfrak{T}_z)}{\partial x} - \frac{\partial(T_y + \mathfrak{T}_y)}{\partial z} \right. \\
& \qquad \left. - \left(\frac{\partial \mathcal{R}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{R}_z}{\partial y}\right)\right]\delta\xi \\
& + \left[\rho(Y_i - Y_e) - \frac{\partial(T_z + \mathfrak{T}_z)}{\partial x} - \frac{\partial(N_y + \mathcal{M}_y)}{\partial y} - \frac{\partial(T_x + \mathfrak{T}_x)}{\partial z} \right. \\
& \qquad \left. - \left(\frac{\partial \mathcal{R}_z}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{R}_x}{\partial z}\right)\right]\delta\eta \\
& \left[\rho(Z_i - Z_e) - \frac{\partial(T_y + \mathfrak{T}_y)}{\partial x} - \frac{\partial(T_x + \mathfrak{T}_x)}{\partial y} - \frac{\partial(N_z + \mathcal{N}_z)}{\partial z} \right. \\
& \qquad \left. - \left(\frac{\partial \mathcal{R}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{R}_y}{\partial x}\right)\right]\delta\zeta \Big\}\, d\varpi.
\end{aligned}
$$

La première intégrale s'étend à tous les éléments de la surface qui limite le milieu, la seconde à tous les éléments de volume du milieu.

IV. — Équations d'équilibre d'un milieu vitreux.

Les résultats déjà obtenus nous permettent d'écrire les conditions d'équilibre d'un milieu vitreux. Ces conditions s'obtiennent, en effet, en écrivant que l'on a

$$d\mathfrak{T}_e - \delta_T \mathfrak{F} = 0,$$

quelle que soit la modification virtuelle imposée au système, partant quelles que soient, en chaque point, les valeurs de $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$. Nous

devons donc avoir, en tout point du milieu vitreux,

$$(68)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial(N_x+\mathfrak{L}_x)}{\partial x}+\frac{\partial(T_z+\mathfrak{T}_z)}{\partial y}+\frac{\partial(T_y+\mathfrak{T}_y)}{\partial z}+\frac{\partial\mathfrak{R}_y}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{R}_z}{\partial y}=\rho(X_i+X_e),\\ &\frac{\partial(T_z+\mathfrak{T}_z)}{\partial x}+\frac{\partial(N_y+\mathfrak{M}_y)}{\partial y}+\frac{\partial(T_x+\mathfrak{T}_x)}{\partial z}+\frac{\partial\mathfrak{R}_z}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{R}_x}{\partial z}=\rho(Y_i+Y_e),\\ &\frac{\partial(T_y+\mathfrak{T}_y)}{\partial x}+\frac{\partial(T_x+\mathfrak{T}_x)}{\partial y}+\frac{\partial(N_z+\mathfrak{N}_z)}{\partial z}+\frac{\partial\mathfrak{R}_x}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{R}_y}{\partial x}=\rho(Z_i+Z_e)\end{aligned}\right.$$

et, en tout point de la surface qui limite le milieu,

$$(69)\quad \left\{\begin{aligned} &(N_x+\mathfrak{L}_x)\alpha+(T_z+\mathfrak{T}_z)\beta+(T_y+\mathfrak{T}_y)\gamma+\mathfrak{R}_y\gamma-\mathfrak{R}_z\beta=P_x,\\ &(T_z+\mathfrak{T}_z)\alpha+(N_y+\mathfrak{M}_y)\beta+(T_x+\mathfrak{T}_x)\gamma+\mathfrak{R}_z\alpha-\mathfrak{R}_x\gamma=P_y,\\ &(T_y+\mathfrak{T}_y)\alpha+(T_x+\mathfrak{T}_x)\beta+(N_z+\mathfrak{N}_z)\gamma+\mathfrak{R}_x\beta-\mathfrak{R}_y\alpha=P_z.\end{aligned}\right.$$

Ces équations, excessivement compliquées, se simplifient beaucoup lorsque les actions, tant intérieures qu'extérieures, sont *newtoniennes;* dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} &\mathfrak{L}_x=0, && \mathfrak{M}_y=0, && \mathfrak{N}_z=0,\\ &\mathfrak{T}_x=0, && \mathfrak{T}_y=0, && \mathfrak{T}_z=0,\\ &\mathfrak{R}_x=0, && \mathfrak{R}_y=0, && \mathfrak{R}_z=0 \end{aligned}$$

et les équations (68) et (69) prennent la forme classique

$$(70)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial T_z}{\partial y}+\frac{\partial T_y}{\partial z}=\rho(X_i+X_e),\\ &\frac{\partial T_z}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial T_x}{\partial z}=\rho(Y_i+Y_e),\\ &\frac{\partial T_y}{\partial x}+\frac{\partial T_x}{\partial y}+\frac{\partial N_z}{\partial z}=\rho(Z_i+Z_e),\end{aligned}\right.$$

$$(71)\quad \left\{\begin{aligned} &N_x\alpha+T_z\beta+T_y\gamma=P_x,\\ &T_z\alpha+N_y\beta+T_x\gamma=P_y,\\ &T_y\alpha+T_x\beta+N_z\gamma=P_z.\end{aligned}\right.$$

Dans ces égalités figurent les six quantités

$$\begin{aligned} &N_x, && N_y, && N_z,\\ &T_x, && T_y, && T_z \end{aligned}$$

qui se tirent des équations (62) en y remplaçant respectivement

$$\mathcal{E}_1, \quad \mathcal{E}_2, \quad \mathcal{E}_3, \quad \mathcal{G}_1, \quad \mathcal{G}_2, \quad \mathcal{G}_3$$

par

$$e_1, \quad e_2, \quad e_3, \quad g_1, \quad g_2, \quad g_3.$$

Les conditions d'équilibre que l'on obtient ainsi sont équivalentes à celles qu'a données M. Boussinesq ([1]).

V. — Équations du mouvement d'un milieu vitreux ([2]).

Pour parvenir à la mise en équations du mouvement d'un milieu vitreux, il nous reste encore à former le *travail virtuel des forces d'inertie* et le *travail virtuel de la viscosité*.

Le premier de ces deux travaux, immédiatement connu, a pour expression

$$(72) \qquad d\mathcal{E}_j = -\int\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\,\delta\xi + \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\,\delta\eta + \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\,\delta\zeta\right)\rho\, d\varpi.$$

Le travail des actions de viscosité est d'une forme beaucoup plus compliquée.

Dans le temps dt, un élément de masse du système éprouve une déformation infiniment petite que l'on peut définir, en la rapportant aux axes Ox, Oy, Oz, par les six quantités

$$\begin{array}{lll} D_1 = D'_1\, dt, & D_2 = D'_2\, dt, & D_3 = D'_3\, dt, \\ G_1 = G'_1\, dt, & G_2 = G'_2\, dt, & G_3 = G'_3\, dt. \end{array}$$

Au lieu de rapporter cette déformation à des axes arbitrairement choisis, on peut la rapporter aux seuls axes privilégiés que l'on recon-

---

([1]) J. Boussinesq, *Théorie des ondes liquides périodiques*, Note III (Mémoires présentés par divers savants à l'Institut de France, t. XX). — *Cf.* E. et F. Cosserat, *Sur la Théorie de l'Élasticité* (premier Mémoire, n° 17).

([2]) P. Duhem, *Sur la viscosité en un milieu vitreux* (*Comptes rendus*, t. CXXXVI, 2 février 1903, p. 281). — *Sur les équations du mouvement et la relation supplémentaire au sein d'un milieu vitreux* (*Ibid.*, 9 février 1903, p. 343).

devons donc avoir, en tout point du milieu vitreux,

$$
(68)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial(\mathrm{N}_x+\mathfrak{L}_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\mathrm{T}_z+\mathfrak{T}_z)}{\partial y}+\frac{\partial(\mathrm{T}_y+\mathfrak{T}_y)}{\partial z}+\frac{\partial\mathfrak{R}_y}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{R}_z}{\partial y}=\rho(\mathrm{X}_i+\mathrm{X}_e),\\
&\frac{\partial(\mathrm{T}_z+\mathfrak{T}_z)}{\partial x}+\frac{\partial(\mathrm{N}_y+\mathfrak{M}_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\mathrm{T}_x+\mathfrak{T}_x)}{\partial z}+\frac{\partial\mathfrak{R}_z}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{R}_x}{\partial z}=\rho(\mathrm{Y}_i+\mathrm{Y}_e),\\
&\frac{\partial(\mathrm{T}_y+\mathfrak{T}_y)}{\partial x}+\frac{\partial(\mathrm{T}_x+\mathfrak{T}_x)}{\partial y}+\frac{\partial(\mathrm{N}_z+\mathfrak{N}_z)}{\partial z}+\frac{\partial\mathfrak{R}_x}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{R}_y}{\partial x}=\rho(\mathrm{Z}_i+\mathrm{Z}_e)
\end{aligned}
\right.
$$

et, en tout point de la surface qui limite le milieu,

$$
(69)\quad \left\{
\begin{aligned}
&(\mathrm{N}_x+\mathfrak{L}_x)\alpha+(\mathrm{T}_z+\mathfrak{T}_z)\beta+(\mathrm{T}_y+\mathfrak{T}_y)\gamma+\mathfrak{R}_y\gamma-\mathfrak{R}_z\beta=\mathrm{P}_x,\\
&(\mathrm{T}_z+\mathfrak{T}_z)\alpha+(\mathrm{N}_y+\mathfrak{M}_y)\beta+(\mathrm{T}_x+\mathfrak{T}_x)\gamma+\mathfrak{R}_z\alpha-\mathfrak{R}_x\gamma=\mathrm{P}_y,\\
&(\mathrm{T}_y+\mathfrak{T}_y)\alpha+(\mathrm{T}_x+\mathfrak{T}_x)\beta+(\mathrm{N}_z+\mathfrak{N}_z)\gamma+\mathfrak{R}_x\beta-\mathfrak{R}_y\alpha=\mathrm{P}_z.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces équations, excessivement compliquées, se simplifient beaucoup lorsque les actions, tant intérieures qu'extérieures, sont *newtoniennes;* dans ce cas, on a

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{L}_x=0, && \mathfrak{M}_y=0, && \mathfrak{N}_z=0,\\
&\mathfrak{T}_x=0, && \mathfrak{T}_y=0, && \mathfrak{T}_z=0,\\
&\mathfrak{R}_x=0, && \mathfrak{R}_y=0, && \mathfrak{R}_z=0
\end{aligned}
$$

et les équations (68) et (69) prennent la forme classique

$$
(70)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathrm{N}_x}{\partial x}+\frac{\partial\mathrm{T}_z}{\partial y}+\frac{\partial\mathrm{T}_y}{\partial z}=\rho(\mathrm{X}_i+\mathrm{X}_e),\\
&\frac{\partial\mathrm{T}_z}{\partial x}+\frac{\partial\mathrm{N}_y}{\partial y}+\frac{\partial\mathrm{T}_x}{\partial z}=\rho(\mathrm{Y}_i+\mathrm{Y}_e),\\
&\frac{\partial\mathrm{T}_y}{\partial x}+\frac{\partial\mathrm{T}_x}{\partial y}+\frac{\partial\mathrm{N}_z}{\partial z}=\rho(\mathrm{Z}_i+\mathrm{Z}_e),
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(71)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{N}_x\alpha+\mathrm{T}_z\beta+\mathrm{T}_y\gamma=\mathrm{P}_x,\\
&\mathrm{T}_z\alpha+\mathrm{N}_y\beta+\mathrm{T}_x\gamma=\mathrm{P}_y,\\
&\mathrm{T}_y\alpha+\mathrm{T}_x\beta+\mathrm{N}_z\gamma=\mathrm{P}_z.
\end{aligned}
\right.
$$

Dans ces égalités figurent les six quantités

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{N}_x, && \mathrm{N}_y, && \mathrm{N}_z,\\
&\mathrm{T}_x, && \mathrm{T}_y, && \mathrm{T}_z
\end{aligned}
$$

Si le milieu, au lieu d'être vitreux, *était cristallisé, la fonction dissipative $\mathfrak{F}$ devrait être encore une forme quadratique définie positive de*

$$\Delta'_1,\quad \Delta'_2,\quad \Delta'_3;\qquad \Gamma'_1,\quad \Gamma'_2,\quad \Gamma'_3;$$

seulement cette forme ne serait plus nécessairement donnée par la formule (74); les coefficients de cette forme pourraient dépendre non seulement de T et de σ_1, σ_2, σ_3, mais encore de l'orientation des axes 1, 2, 3 par rapport à la matière de l'élément $d\varpi$.

Imposons au système une modification virtuelle quelconque $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$; à cette modification correspondront, en chaque point, trois dilatations virtuelles D_1, D_2, D_3 et trois glissements virtuels G_1, G_2, G_3 donnés par les égalités (24), partant, six quantités Δ_1, Δ_2, Δ_3, Γ_1, Γ_2, Γ_3 données par les égalités (33). Le travail virtuel de la viscosité sera

$$(76)\qquad d\mathcal{E}_v = -\int\Big(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_1}\Delta_1+\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_2}\Delta_2+\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_3}\Delta_3 \\ 2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_1}\Gamma_1+2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_2}\Gamma_2+2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_3}\Gamma_3\Big)\,d\varpi.$$

Posons

$$(77)\quad \left\{\begin{aligned}
\nu_x &= -\left(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_1}\mathfrak{X}_1^2+\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_2}\mathfrak{X}_2^2+\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_3}\mathfrak{X}_3^2+2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_1}\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3+2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_2}\mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_1+2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_3}\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2\right),\\
\nu_y &= -\left(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_1}\mathfrak{Y}_1^2+\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_2}\mathfrak{Y}_2^2+\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_3}\mathfrak{Y}_3^2+2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_1}\mathfrak{Y}_2\mathfrak{Y}_3+2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_2}\mathfrak{Y}_3\mathfrak{Y}_1+2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_3}\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}_2\right),\\
\nu_z &= -\left(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_1}\mathfrak{Z}_1^2+\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_2}\mathfrak{Z}_2^2+\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_3}\mathfrak{Z}_3^2+2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_1}\mathfrak{Z}_2\mathfrak{Z}_3+2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_2}\mathfrak{Z}_3\mathfrak{Z}_1+2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_3}\mathfrak{Z}_1\mathfrak{Z}_2\right);\\
\tau_x &= -\Big[\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_1}\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Z}_1+\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_2}\mathfrak{Y}_2\mathfrak{Z}_2+\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_3}\mathfrak{Y}_3\mathfrak{Z}_3\\
&\quad+2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_1}(\mathfrak{Z}_2\mathfrak{Y}_3+\mathfrak{Y}_2\mathfrak{Z}_3)+2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_2}(\mathfrak{Z}_3\mathfrak{Y}_1+\mathfrak{Y}_3\mathfrak{Z}_1)+2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_3}(\mathfrak{Z}_1\mathfrak{Y}_2+\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Z}_2)\Big],\\
\tau_y &= -\Big[\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_1}\mathfrak{Z}_1\mathfrak{X}_1+\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_2}\mathfrak{Z}_2\mathfrak{X}_2+\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_3}\mathfrak{Z}_3\mathfrak{X}_3\\
&\quad+2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_1}(\mathfrak{X}_2\mathfrak{Z}_3+\mathfrak{Z}_2\mathfrak{X}_3)+2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_2}(\mathfrak{X}_3\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{Z}_3\mathfrak{X}_1)+2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_3}(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Z}_2+\mathfrak{Z}_1\mathfrak{X}_2)\Big],\\
\tau_z &= -\Big[\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_1}\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_1+\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_2}\mathfrak{X}_2\mathfrak{Y}_2+\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_3}\mathfrak{X}_3\mathfrak{Y}_3\\
&\quad+2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_1}(\mathfrak{Y}_2\mathfrak{X}_3+\mathfrak{X}_2\mathfrak{Y}_3)+2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_2}(\mathfrak{Y}_3\mathfrak{X}_1+\mathfrak{X}_3\mathfrak{Y}_1)+2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_3}(\mathfrak{Y}_1\mathfrak{X}_2+\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_2)\Big].
\end{aligned}\right.$$

naisse à l'instant t, au sein de l'élément considéré, savoir aux axes de dilatation de cet élément; cette déformation sera alors définie par les six quantités infiniment petites

$$\Delta'_1\,dt,\quad \Delta'_2\,dt,\quad \Delta'_3\,dt,\quad \Gamma'_1\,dt,\quad \Gamma'_2\,dt,\quad \Gamma'_3\,dt,$$

Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3, Γ'_1, Γ'_2, Γ'_3 étant ce que deviennent les quantités Δ_1, Δ_2, Δ_3, Γ_1, Γ_2, Γ_3 lorsque, dans ces égalités (33), on remplace D_1, D_2, D_3, G_1, G_2, G_3 par D'_1, D'_2, D'_3, G'_1, G'_2, G'_3. Cela revient à dire que l'on a

$$(73)\quad \left\{\begin{array}{l} \Delta'_1 = D'_1\mathfrak{X}_1^2 + D'_2\mathfrak{Y}_1^2 + D'_3\mathfrak{Z}_1^2 + 2G'_1\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Z}_1 + 2G'_2\mathfrak{Z}_1\mathfrak{X}_1 + 2G'_3\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

La *fonction dissipative* $\mathfrak{F}\,d\varpi$, relative au volume élémentaire $d\varpi$, devra être une fonction de la température T; de l'état de la masse élémentaire à l'instant t, c'est-à-dire des valeurs prises à cet instant, en un point de l'élément $d\varpi$, par σ_1, σ_2, σ_3; enfin, de Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3, Γ'_1, Γ'_2, Γ'_3; elle doit être une forme quadratique définie positive de ces six dernières variables. Des considérations de symétrie évidentes permettent d'écrire

$$(74)\quad \begin{aligned} \mathfrak{F} = {} & a(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\Delta_1'^2 + a(\sigma_2, \sigma_3, \sigma_1)\Delta_2'^2 + a(\sigma_3, \sigma_1, \sigma_2)\Delta_3'^2 \\ & + 2b(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\Delta'_2\Delta'_3 + 2b(\sigma_2, \sigma_3, \sigma_1)\Delta'_3\Delta'_1 + 2b(\sigma_3, \sigma_1, \sigma_2)\Delta'_1\Delta'_2 \\ & + c(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\Gamma_1'^2 + c(\sigma_2, \sigma_3, \sigma_1)\Gamma_2'^2 + c(\sigma_3, \sigma_1, \sigma_2)\Gamma_3'^2 \\ & + 2d(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\Gamma'_2\Gamma'_3 + 2d(\sigma_2, \sigma_3, \sigma_1)\Gamma'_3\Gamma'_1 + 2d(\sigma_3, \sigma_1, \sigma_2)\Gamma'_1\Gamma'_2 \\ & + 2f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\Delta'_1\Gamma'_1 + 2f(\sigma_2, \sigma_3, \sigma_1)\Delta'_2\Gamma'_2 + 2f(\sigma_3, \sigma_1, \sigma_2)\Delta'_3\Gamma'_3 \\ & + 2[m(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\Gamma'_2 + m(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_2)\Gamma'_3]\Delta'_1 \\ & + 2[m(\sigma_2, \sigma_3, \sigma_1)\Gamma'_3 + m(\sigma_2, \sigma_1, \sigma_3)\Gamma'_1]\Delta'_2 \\ & + 2[m(\sigma_3, \sigma_1, \sigma_2)\Gamma'_1 + m(\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1)\Gamma'_2]\Delta'_3. \end{aligned}$$

Les mêmes considérations de symétrie montrent que l'on a, quels que soient σ, σ', σ'',

$$(75)\quad \left\{\begin{array}{l} a(\sigma, \sigma', \sigma'') = a(\sigma, \sigma'', \sigma'), \\ b(\sigma, \sigma', \sigma'') = b(\sigma, \sigma'', \sigma'), \\ c(\sigma, \sigma', \sigma'') = c(\sigma, \sigma'', \sigma'), \\ d(\sigma, \sigma', \sigma'') = d(\sigma, \sigma'', \sigma'), \\ f(\sigma, \sigma', \sigma'') = f(\sigma, \sigma'', \sigma'). \end{array}\right.$$

Enfin, les fonctions a, b, c, d, f, m dépendent de la température T.

2° En tout point du milieu

$$(82)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial(N_x+\mathcal{L}_x+\nu_x)}{\partial x}+\frac{\partial(T_z+\mathcal{C}_z+\tau_z)}{\partial y}+\frac{\partial(T_y+\mathcal{C}_y+\tau_y)}{\partial z}+\frac{\partial\mathcal{R}_y}{\partial z}-\frac{\partial\mathcal{R}_z}{\partial y}\\
&\quad=\rho\left(X_i+X_e-\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right),\\
&\frac{\partial(T_z+\mathcal{C}_z+\tau_z)}{\partial x}+\frac{\partial(N_y+\mathcal{M}_y+\nu_y)}{\partial y}+\frac{\partial(T_x+\mathcal{C}_x+\tau_x)}{\partial z}+\frac{\partial\mathcal{R}_z}{\partial x}-\frac{\partial\mathcal{R}_x}{\partial z}\\
&\quad=\rho\left(Y_i+Y_e-\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right),\\
&\frac{\partial(T_y+\mathcal{C}_y+\tau_y)}{\partial x}+\frac{\partial(T_x+\mathcal{C}_x+\tau_x)}{\partial y}+\frac{\partial(N_z+\mathcal{N}_z+\nu_z)}{\partial z}+\frac{\partial\mathcal{R}_x}{\partial y}-\frac{\partial\mathcal{R}_y}{\partial x}\\
&\quad=\rho\left(Z_i+Z_e-\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right).
\end{aligned}\right.$$

VI. — Quantité de chaleur dégagée par un élément du milieu [1].

Considérons un élément de masse $dm = \rho\, d\varpi$. Son entropie $S\,dm$ est donnée par l'égalité

$$ES = -\frac{\partial\Phi}{\partial T}.$$

D'autre part, les viscosités intrinsèques de cet élément effectuent, en une modification réelle ou virtuelle, un travail qui a pour valeur

$$d\tau_v = (\nu_x D_1 + \nu_y D_2 + \nu_z D_3 + 2\tau_x G_1 + 2\tau_y G_2 + 2\tau_z G_3)\,d\varpi.$$

Dès lors, en une modification réelle ou virtuelle quelconque, cet élément dégage une quantité de chaleur dQ qui a pour valeur [*Recherches sur l'Hydrodynamique*. Première Partie, égalité (80)]

$$(83)\quad E\,dQ = \left[T\delta\frac{\partial\Phi}{\partial T} - \frac{1}{\rho}(\nu_x D_1 + \nu_y D_2 + \nu_z D_3 + 2\tau_x G_1 + 2\tau_y G_2 + 2\tau_z G_3)\right]dm.$$

---

[1] P. Duhem, *Sur les équations du mouvement et la relation supplémentaire au sein d'un milieu vitreux* (*Comptes rendus*, t. CXXXVI, p. 343; 9 février 1903).

Selon les égalités (33), l'égalité (76) pourra s'écrire

$$(78)\quad \begin{aligned} d\mathfrak{T}_v &= \int (\nu_x D_1 + \nu_y D_2 + \nu_z D_3 + 2\tau_x G_1 + 2\tau_y G_2 + 2\tau_z G_3)\, d\varpi \\ &= \int \Big[\nu_x \frac{\partial \delta\xi}{\partial x} + \nu_y \frac{\partial \delta\eta}{\partial y} + \nu_z \frac{\partial \delta\zeta}{\partial z} \\ &\quad + \tau_x \Big(\frac{\partial \delta\eta}{\partial z} + \frac{\partial \delta\zeta}{\partial y} \Big) + \tau_y \Big(\frac{\partial \delta\zeta}{\partial x} + \frac{\partial \delta\xi}{\partial z} \Big) + \tau_z \Big(\frac{\partial \delta\xi}{\partial y} + \frac{\partial \delta\eta}{\partial x} \Big) \Big]\, d\varpi. \end{aligned}$$

Si les quantités ν_x, ν_y, ν_z, τ_x, τ_y, τ_z *admettent, par rapport à* x, y, z, *des dérivées partielles qui soient finies*, l'égalité (78) peut se transformer en

$$(79)\quad \begin{aligned} d\mathfrak{T}_v = &-\int [\ (\nu_x \alpha + \tau_z \beta + \tau_y \gamma)\, \delta\xi \\ &\qquad + (\tau_z \alpha + \nu_y \beta + \tau_x \gamma)\, \delta\eta \\ &\qquad + (\tau_y \alpha + \tau_x \beta + \nu_z \gamma)\, \delta\zeta\,]\, dS \\ &-\int \Big[\ \Big(\frac{\partial \nu_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} \Big) \delta\xi \\ &\qquad + \Big(\frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \nu_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} \Big) \delta\eta \\ &\qquad + \Big(\frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \nu_z}{\partial z} \Big) \delta\zeta \Big]\, d\varpi. \end{aligned}$$

Les formules (76) à (79) sont vraies également pour les milieux vitreux et pour les milieux cristallisés.

Les équations du mouvement du système s'obtiennent en écrivant que l'on a, pour toute modification virtuelle imposée au système,

$$(80)\qquad d\mathfrak{T}_c - \delta_T \mathcal{F} + d\mathfrak{T}_j + d\mathfrak{T}_v = 0.$$

Cette égalité devant avoir lieu quels que soient $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, on doit avoir, selon les égalités (67), (72) et (79) :

1° En tout point de la surface qui limite le milieu

$$(81)\quad \left\{ \begin{aligned} &(N_x + \mathcal{L}_x + \nu_x)\alpha + (T_z + \mathfrak{T}_z + \tau_z)\beta + (T_y + \mathfrak{T}_y + \tau_y)\gamma + \mathfrak{R}_y \gamma - \mathfrak{R}_z \beta = P_x, \\ &(T_z + \mathfrak{T}_z + \tau_z)\alpha + (N_y + \mathcal{M}_y + \nu_y)\beta + (T_x + \mathfrak{T}_x + \tau_x)\gamma + \mathfrak{R}_z \alpha - \mathfrak{R}_x \gamma = P_y, \\ &(T_y + \mathfrak{T}_y + \tau_y)\alpha + (T_x + \mathfrak{T}_x + \tau_x)\beta + (N_z + \mathcal{N}_z + \tau_z)\gamma + \mathfrak{R}_x \beta - \mathfrak{R}_y \alpha = P_z; \end{aligned} \right.$$

$$(87)\ (suite)\ \begin{cases} b_x = \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial a}e_1 + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial b}e_2 + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial c}e_3 \\ \quad + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}\right)g_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c}\right)g_2 + \left(\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a}\right)g_3, \\ b_y = \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial a}e_1 + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial b}e_2 + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial c}e_3 \\ \quad + \left(\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b}\right)g_1 + \left(\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial c}\right)g_2 + \left(\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a}\right)g_3, \\ b_z = \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial a}e_1 + \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial b}e_2 + \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial c}e_3 \\ \quad + \left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b}\right)g_1 + \left(\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial c}\right)g_2 + \left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}\right)g_3. \end{cases}$$

En vertu des égalités (30), l'égalité (86) deviendra

$$(88)\quad dQ = -\left[c\,\delta T + \left(a_x + \frac{\nu_x}{E\rho}\right)D_1 + \left(a_y + \frac{\nu_y}{E\rho}\right)D_2 + \left(a_z + \frac{\nu_z}{E\rho}\right)D_3 \right.$$
$$\left. + 2\left(b_x + \frac{\tau_x}{E\rho}\right)G_1 + 2\left(b_y + \frac{\tau_y}{E\rho}\right)G_2 + 2\left(b_z + \frac{\tau_z}{E\rho}\right)G_3\right] dm.$$

Toutes ces formules sont aussi vraies pour les milieux cristallisés que pour les milieux vitreux.

VII. — Formation de la relation supplémentaire.

Il nous suffira de trouver une autre expression de la quantité dQ pour obtenir, par le rapprochement de ces deux expressions, la relation supplémentaire.

Admettons que la propagation de la chaleur ait lieu exclusivement par conductibilité.

La conductibilité du milieu en chaque point peut être définie par les trois coefficients de conductibilité suivant les directions des trois axes de dilatation, directions que nous désignerons par les indices 1, 2, 3; visiblement, ces coefficients peuvent être représentés par

$$K(T, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad K(T, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_1), \quad K(T, \sigma_3, \sigma_1, \sigma_2),$$

Posons

$$(84)\qquad c = -\frac{T}{E}\frac{\partial^2\Phi}{\partial T^2},$$

puis

$$(85)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \mathfrak{e}_1 = -\dfrac{T}{E}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial T}, & \mathfrak{e}_2 = -\dfrac{T}{E}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial T}, & \mathfrak{e}_3 = -\dfrac{T}{E}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3\,\partial T}, \\ \mathfrak{g}_1 = -\dfrac{T}{E}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial T}, & \mathfrak{g}_2 = -\dfrac{T}{E}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2\,\partial T}, & \mathfrak{g}_3 = -\dfrac{T}{E}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3\,\partial T} \end{array}\right.$$

ou bien, en vertu des égalités (34) et (42),

$$(85\ bis)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{e}_1 = -\dfrac{T}{E}\left[\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial J_1\,\partial T} + 4(\varepsilon_2+\varepsilon_3)\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial J_2\,\partial T} + (4\varepsilon_2\varepsilon_3-\gamma_1^2)\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial J_3\,\partial T}\right], \\ \mathfrak{e}_2 = -\dfrac{T}{E}\left[\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial J_1\,\partial T} + 4(\varepsilon_3+\varepsilon_1)\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial J_2\,\partial T} + (4\varepsilon_3\varepsilon_1-\gamma_2^2)\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial J_3\,\partial T}\right], \\ \mathfrak{e}_3 = -\dfrac{T}{E}\left[\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial J_1\,\partial T} + 4(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial J_2\,\partial T} + (4\varepsilon_1\varepsilon_2-\gamma_3^2)\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial J_3\,\partial T}\right]; \\ \mathfrak{g}_1 = \dfrac{T}{E}\left[2\gamma_1\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial J_2\,\partial T} - (2\varepsilon_1\gamma_1-\gamma_2\gamma_3)\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial J_3\,\partial T}\right], \\ \mathfrak{g}_2 = \dfrac{T}{E}\left[2\gamma_2\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial J_2\,\partial T} - (2\varepsilon_2\gamma_2-\gamma_3\gamma_1)\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial J_3\,\partial T}\right], \\ \mathfrak{g}_3 = \dfrac{T}{E}\left[2\gamma_3\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial J_2\,\partial T} - (2\varepsilon_3\gamma_3-\gamma_1\gamma_2)\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial J_3\,\partial T}\right]; \end{array}\right.$$

nous aurons, en vertu des égalités (34), (42) et (83),

$$(86)\qquad \begin{array}{l} dQ = -(c\,\delta T + \mathfrak{e}_1\,\delta\varepsilon_1 + \mathfrak{e}_2\,\delta\varepsilon_2 + \mathfrak{e}_3\,\delta\varepsilon_3 + \mathfrak{g}_1\,\delta\gamma_1 + \mathfrak{g}_2\,\delta\gamma_2 + \mathfrak{g}_3\,\delta\gamma_3)\,dm \\ \qquad - \dfrac{1}{\rho E}(\nu_x D_1 + \nu_y D_2 + \nu_z D_3 + 2\tau_x G_1 + 2\tau_y G_2 + 2\tau_z G_3)\,dm. \end{array}$$

Posons

$$(87)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{a}_x = \left(\dfrac{\partial x}{\partial a}\right)^2\mathfrak{e}_1 + \left(\dfrac{\partial x}{\partial b}\right)^2\mathfrak{e}_2 + \left(\dfrac{\partial x}{\partial c}\right)^2\mathfrak{e}_3 + 2\dfrac{\partial x}{\partial b}\dfrac{\partial x}{\partial c}\mathfrak{g}_1 + 2\dfrac{\partial x}{\partial c}\dfrac{\partial x}{\partial a}\mathfrak{g}_2 + 2\dfrac{\partial x}{\partial a}\dfrac{\partial x}{\partial b}\mathfrak{g}_3, \\ \mathfrak{a}_y = \left(\dfrac{\partial y}{\partial a}\right)^2\mathfrak{e}_1 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial b}\right)^2\mathfrak{e}_2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial c}\right)^2\mathfrak{e}_3 + 2\dfrac{\partial y}{\partial b}\dfrac{\partial y}{\partial c}\mathfrak{g}_1 + 2\dfrac{\partial y}{\partial c}\dfrac{\partial y}{\partial a}\mathfrak{g}_2 + 2\dfrac{\partial y}{\partial a}\dfrac{\partial y}{\partial b}\mathfrak{g}_3, \\ \mathfrak{a}_z = \left(\dfrac{\partial z}{\partial a}\right)^2\mathfrak{e}_1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial b}\right)^2\mathfrak{e}_2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial c}\right)^2\mathfrak{e}_3 + 2\dfrac{\partial z}{\partial b}\dfrac{\partial z}{\partial c}\mathfrak{g}_1 + 2\dfrac{\partial z}{\partial c}\dfrac{\partial z}{\partial a}\mathfrak{g}_2 + 2\dfrac{\partial z}{\partial a}\dfrac{\partial z}{\partial b}\mathfrak{g}_3; \end{array}\right.$$

Soient, pour abréger,

$$(90)\quad \begin{cases} K_x = K_1 \mathcal{X}_1^2 \;\; + K_2 \mathcal{X}_2^2 \;\; + K_3 \mathcal{X}_3^2, \\ K_y = K_1 \mathcal{Y}_1^2 \;\; + K_2 \mathcal{Y}_2^2 \;\; + K_3 \mathcal{Y}_3^2, \\ K_z = K_1 \mathcal{Z}_1^2 \;\; + K_2 \mathcal{Z}_2^2 \;\; + K_3 \mathcal{Z}_3^2, \\ C_x = K_1 \mathcal{Y}_1 \mathcal{Z}_1 + K_2 \mathcal{Y}_2 \mathcal{Z}_2 + K_3 \mathcal{Y}_3 \mathcal{Z}_3, \\ C_y = K_1 \mathcal{Z}_1 \mathcal{X}_1 + K_2 \mathcal{Z}_2 \mathcal{X}_2 + K_3 \mathcal{Z}_3 \mathcal{X}_3, \\ C_z = K_1 \mathcal{X}_1 \mathcal{Y}_1 + K_2 \mathcal{X}_2 \mathcal{Y}_2 + K_3 \mathcal{X}_3 \mathcal{Y}_3. \end{cases}$$

L'égalité (89) deviendra

$$(91)\quad \begin{aligned} q\, d\Sigma\, dt = \Big[& \left(K_x \frac{\partial T}{\partial x} + C_z \frac{\partial T}{\partial y} + C_y \frac{\partial T}{\partial z}\right)\alpha \\ & + \left(C_z \frac{\partial T}{\partial x} + K_y \frac{\partial T}{\partial y} + C_x \frac{\partial T}{\partial z}\right)\beta \\ & + \left(C_y \frac{\partial T}{\partial x} + C_x \frac{\partial T}{\partial y} + K_z \frac{\partial T}{\partial z}\right)\gamma \Big]\, d\Sigma\, dt. \end{aligned}$$

Considérons une surface fermée Σ; dans le temps dt, la partie du milieu que limite cette surface fermée dégage une quantité de chaleur

$$(92)\quad Q\, dt = dt \int q\, d\Sigma,$$

q étant donné par la formule (91), où α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale à l'élément $d\Sigma$ vers l'*intérieur* de la surface Σ.

Il suffit de transformer, en l'égalité (92), l'intégrale de surface en une intégrale étendue au volume que circonscrit cette surface, pour obtenir le résultat suivant :

Chaque élément de masse $dm = \rho\, d\varpi$ dégage, dans le temps dt, une quantité de chaleur

$$(93)\quad \begin{aligned} dQ = -\frac{1}{\rho} \Big[& \frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial T}{\partial x} + C_z \frac{\partial T}{\partial y} + C_y \frac{\partial T}{\partial z}\right) \\ & + \frac{\partial}{\partial y}\left(C_z \frac{\partial T}{\partial x} + K_y \frac{\partial T}{\partial y} + C_x \frac{\partial T}{\partial z}\right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z}\left(C_y \frac{\partial T}{\partial x} + C_x \frac{\partial T}{\partial y} + K_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) \Big]\, dm\, dt. \end{aligned}$$

la fonction $K(T, \sigma, \sigma', \sigma'')$ vérifiant, quels que soient T, σ, σ', σ'', l'égalité

$$K(T, \sigma, \sigma', \sigma'') = K(T, \sigma, \sigma'', \sigma').$$

Nous les représenterons abréviativement par

$$K_1, \quad K_2, \quad K_3.$$

Nous y gagnerons d'ailleurs en généralité, car nos formules deviendront également applicables aux milieux cristallisés; K_1, K_2, K_3 dépendront, dans ce cas, non seulement de T, de σ_1, σ_2, σ_3, mais encore de l'orientation des axes 1, 2, 3 au sein de la matière cristalline.

Soit $d\Sigma$ un élément dont la demi-normale n fait, avec les axes de dilatation, des angles ayant pour cosinus $\cos(n, 1)$, $\cos(n, 2)$, $\cos(n, 3)$. Dans le temps dt, *et dans le sens opposé à la normale* n, l'élément $d\Sigma$ est traversé par une quantité de chaleur

$$(89) \qquad q\, d\Sigma\, dt = \left[K_1 \frac{\partial T}{\partial 1} \cos(n, 1) + K_2 \frac{\partial T}{\partial 2} \cos(n, 2) + K_3 \frac{\partial T}{\partial 3} \cos(n, 3)\right] d\Sigma\, dt,$$

$\frac{\partial T}{\partial 1}$, $\frac{\partial T}{\partial 2}$, $\frac{\partial T}{\partial 3}$ étant les dérivées de la température prises respectivement suivant les directions 1, 2, 3.

Or on a

$$\frac{\partial T}{\partial 1} = \frac{\partial T}{\partial x} \mathcal{X}_1 + \frac{\partial T}{\partial y} \mathcal{Y}_1 + \frac{\partial T}{\partial z} \mathcal{Z}_1,$$
$$\frac{\partial T}{\partial 2} = \frac{\partial T}{\partial x} \mathcal{X}_2 + \frac{\partial T}{\partial y} \mathcal{Y}_2 + \frac{\partial T}{\partial z} \mathcal{Z}_2,$$
$$\frac{\partial T}{\partial 3} = \frac{\partial T}{\partial x} \mathcal{X}_3 + \frac{\partial T}{\partial y} \mathcal{Y}_3 + \frac{\partial T}{\partial z} \mathcal{Z}_3.$$

Si l'on pose

$$\cos(n, x) = \alpha, \qquad \cos(n, y) = \beta, \qquad \cos(n, z) = \gamma,$$

on a

$$\cos(n, 1) = \alpha \mathcal{X}_1 + \beta \mathcal{Y}_1 + \gamma \mathcal{Z}_1,$$
$$\cos(n, 2) = \alpha \mathcal{X}_2 + \beta \mathcal{Y}_2 + \gamma \mathcal{Z}_1,$$
$$\cos(n, 3) = \alpha \mathcal{X}_3 + \beta \mathcal{Y}_3 + \gamma \mathcal{Z}_3.$$

D'autre part, cette même quantité de chaleur doit être donnée par l'égalité (88), si l'on y pose

$$\delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t}\right) dt,$$

$$D_1 = D'_1\,dt, \qquad D_2 = D'_2\,dt, \qquad D_3 = D'_3\,dt,$$
$$G_1 = G'_1\,dt, \qquad G_2 = G'_2\,dt, \qquad G_3 = G'_3\,dt.$$

On doit donc avoir

$$\begin{aligned}
&\rho c\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t}\right)\\
&\quad + \left(\rho a_x + \frac{\nu_x}{E}\right) D'_1 + \left(\rho a_y + \frac{\nu_y}{E}\right) D'_2 + \left(\rho a_z + \frac{\nu_z}{E}\right) D'_3\\
&\quad + 2\left(\rho b_x + \frac{\tau_x}{E}\right) G'_1 + 2\left(\rho b_y + \frac{\tau_y}{E}\right) G'_2 + 2\left(\rho b_z + \frac{\tau_z}{E}\right) G'_3\\
&\qquad - \frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial T}{\partial x} + C_z \frac{\partial T}{\partial y} + C_y \frac{\partial T}{\partial z}\right)\\
&\qquad - \frac{\partial}{\partial y}\left(C_z \frac{\partial T}{\partial x} + K_z \frac{\partial T}{\partial y} + C_x \frac{\partial T}{\partial z}\right)\\
&\qquad - \frac{\partial}{\partial z}\left(C_y \frac{\partial T}{\partial x} + C_x \frac{\partial T}{\partial y} + K_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) = 0.
\end{aligned}$$

C'est la relation supplémentaire que nous nous proposions d'établir.

Nous allons aborder, en cette seconde Partie, un cas particulièrement simple que nous définirons de la manière suivante :

1° Les actions, tant intérieures qu'extérieures, sont newtoniennes;

2° Les quantités ξ, η, ζ et leurs dérivées partielles de tous les ordres par rapport à t, a, b, c sont assez petites, en tout point, pour que l'on puisse, dans les calculs, les traiter comme des infiniment petits du premier ordre.

Dans ces conditions, les égalités (8) de la première Partie deviennent

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\varepsilon_1 = \frac{\partial \xi}{\partial a}, && \varepsilon_2 = \frac{\partial \eta}{\partial b}, && \varepsilon_3 = \frac{\partial \zeta}{\partial c}, \\ &\gamma_1 = \frac{\partial \eta}{\partial c} + \frac{\partial \zeta}{\partial b}, && \gamma_2 = \frac{\partial \zeta}{\partial a} + \frac{\partial \xi}{\partial c}, && \gamma_3 = \frac{\partial \xi}{\partial b} + \frac{\partial \eta}{\partial a}, \end{aligned} \right.$$

tandis que l'égalité (4 *bis*) de la première Partie devient

$$(2)\quad \Theta - 1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial \eta}{\partial b} + \frac{\partial \zeta}{\partial c} = \vartheta.$$

Les égalités (27) et (28) de la première Partie ou bien encore les égalités (30) de la même Partie donnent

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\delta\varepsilon_1 = D_1 = \frac{\partial\, \delta\xi}{\partial a}, \qquad \delta\varepsilon_3 = D_2 = \frac{\partial\, \delta\eta}{\partial b}, \qquad \delta\varepsilon_2 = D_3 = \frac{\partial\, \delta\zeta}{\partial c}, \\ &\delta\gamma_1 = 2\,G_1 = \frac{\partial\, \delta\eta}{\partial c} + \frac{\partial\, \delta\zeta}{\partial b}, \\ &\delta\gamma_2 = 2\,G_2 = \frac{\partial\, \delta\zeta}{\partial a} + \frac{\partial\, \delta\xi}{\partial c}, \\ &\delta\gamma_3 = 2\,G_3 = \frac{\partial\, \delta\xi}{\partial b} + \frac{\partial\, \delta\eta}{\partial a}. \end{aligned} \right.$$

Dans le développement de la fonction Φ suivant les puissances croissantes de ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3, arrêtons-nous aux termes du second degré par rapport à ces variables. La fonction Φ, devant dépendre exclusivement de T et de J_1, J_2, J_3, devra être indépendante de J_3, du premier degré en J_2 et du second degré en J_1, sans contenir le produit $J_1 J_2$; nous aurons donc

$$\Phi = \varphi_0(T) + \varphi_1(T)\, J_1 + \varphi_2(T)\, J_1^2 + \varphi_2'(T)\, J_2$$

DEUXIÈME PARTIE.

LES MILIEUX VITREUX PEU DÉFORMÉS.

CHAPITRE I.

ÉQUILIBRE ET MOUVEMENT D'UN MILIEU VITREUX FAIBLEMENT ÉCARTÉ DE L'ÉTAT INITIAL.

I. — Équilibre d'un milieu vitreux faiblement écarté de l'état initial.

Les considérations développées dans la première Partie de ces *Recherches* nous montrent de quelle manière on peut logiquement mettre en équations les problèmes relatifs à l'équilibre et au mouvement d'un milieu vitreux. Mais cette mise en équations, fort compliquée d'ailleurs, est plutôt figurée qu'effective. A chaque instant, nous avons fait figurer dans nos équations des quantités telles que σ_1, σ_2, σ_3 ou que les $\mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{y}_i$, $\mathfrak{z}_i$; or, pour obtenir effectivement les expressions de ces quantités en fonctions de ξ, η, ζ et de leurs dérivées par rapport à a, b, c, il faudrait au préalable résoudre l'équation (10) de la première Partie, qui est une équation complète du troisième degré par rapport à la variable S.

C'est donc seulement dans certains cas particuliers où l'on aura, par des hypothèses convenables, grandement simplifié le problème, que l'on pourra parvenir à une mise en équations effective de ce problème.

D'ailleurs, l'égalité générale

$$\frac{\partial N_x}{\partial a} = \frac{\partial N_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial N_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial N_x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial N_x}{\partial x}\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial a}\right) + \frac{\partial N_x}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial a} + \frac{\partial N_x}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial a}$$

donne la première des égalités

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial N_x}{\partial x} = \dfrac{\partial N_x}{\partial a}, & \dfrac{\partial T_z}{\partial y} = \dfrac{\partial T_z}{\partial b}, & \dfrac{\partial T_y}{\partial z} = \dfrac{\partial T_y}{\partial c}, \\ \dfrac{\partial T_z}{\partial x} = \dfrac{\partial T_z}{\partial a}, & \dfrac{\partial N_y}{\partial y} = \dfrac{\partial N_y}{\partial b}, & \dfrac{\partial T_x}{\partial z} = \dfrac{\partial T_x}{\partial c}, \\ \dfrac{\partial T_y}{\partial x} = \dfrac{\partial T_y}{\partial a}, & \dfrac{\partial T_x}{\partial y} = \dfrac{\partial T_x}{\partial b}, & \dfrac{\partial N_z}{\partial z} = \dfrac{\partial N_z}{\partial c}. \end{cases}$$

Dès lors, les équations (70) de la première Partie, vérifiées en tout point d'un milieu en équilibre, peuvent s'écrire

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial N_x}{\partial a} + \dfrac{\partial T_z}{\partial b} + \dfrac{\partial T_y}{\partial c} = \rho_0(X_i + X_e), \\ \dfrac{\partial T_z}{\partial a} + \dfrac{\partial N_y}{\partial b} + \dfrac{\partial T_x}{\partial c} = \rho_0(Y_i + Y_e), \\ \dfrac{\partial T_y}{\partial a} + \dfrac{\partial T_x}{\partial b} + \dfrac{\partial N_z}{\partial c} = \rho_0(Z_i + Z_e). \end{cases}$$

Quant aux équations (71) de la première Partie, il est permis de les écrire en donnant aux quantités N_i, T_i les valeurs qu'elles prennent non pas en un point de la surface déformée, mais en un point de la surface primitive; on peut également regarder α, β, γ comme les cosinus directeurs de la normale à la même surface.

Les égalités (8) et (10), jointes aux équations (71) de la première Partie nous donnent alors les équations d'équilibre d'un milieu vitreux très peu écarté de l'état initial, *ce dernier n'étant pas forcément un état d'équilibre sous l'action de forces nulles.* Ces équations sont les équations de Green et de Lamé, complétées comme l'a indiqué M. Poincaré (1).

Nous n'insisterons pas sur ces équations bien connues.

---

(1) H. Poincaré, *Leçons sur la Théorie de l'Élasticité*, p. 54; Paris, 1892. *Leçons sur la théorie mathématique de la Lumière*, p. 31; Paris, 1889.

ou, selon les égalités (19) de la première Partie,

$$(4)\qquad \begin{aligned}\Phi = \varphi_0(T) + \varphi_1(T)(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) + \varphi_2(T)(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2 \\ + 4\varphi_2'(T)(\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1+\varepsilon_1\varepsilon_2) - \varphi_2'(T)(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2).\end{aligned}$$

Posant

$$(5)\qquad \begin{cases} 2\rho_0[\varphi_2(T) + 2\varphi_2'(T)] = \Lambda(T), \\ 2\rho_0\varphi_2'(T) = -M(T), \end{cases}$$

nous pourrons écrire

$$(6)\qquad \begin{aligned}\rho_0\Phi = \rho_0\varphi_0(T) + \rho_0\varphi_1(T)(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) + \tfrac{1}{2}\Lambda(T)(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2 \\ + \tfrac{1}{2}M(T)(2\varepsilon_1^2+2\varepsilon_2^2+2\varepsilon_3^2+\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2).\end{aligned}$$

Les égalités (45) de la première Partie deviennent alors

$$(7)\qquad \begin{cases} \rho_0 e_1 = -\rho_0\varphi_1(T) - \Lambda(T)(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) - 2M(T)\varepsilon_1, \\ \rho_0 e_2 = -\rho_0\varphi_1(T) - \Lambda(T)(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) - 2M(T)\varepsilon_2, \\ \rho_0 e_3 = -\rho_0\varphi_1(T) - \Lambda(T)(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) - 2M(T)\varepsilon_3, \\ \rho_0 g_1 = -M(T)\gamma_1, \\ \rho_0 g_2 = -M(T)\gamma_2, \\ \rho_0 g_3 = -M(T)\gamma_3. \end{cases}$$

Les égalités (61) et (62) de la première Partie donnent sans peine

$$\begin{cases} N_x = \rho_0 e_1, \quad N_y = \rho_0 e_2, \quad N_z = \rho_0 e_3, \\ T_x = \rho_0 g_1, \quad T_y = \rho_0 g_2, \quad T_z = \rho_0 g_3 \end{cases}$$

ou bien, en vertu des égalités (7) et (1),

$$(8)\qquad \begin{cases} N_x = -\rho_0\varphi_1(T) - \Lambda(T)\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial a} + \dfrac{\partial\eta}{\partial b} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial c}\right) - 2M(T)\dfrac{\partial\xi}{\partial a}, \\ N_y = -\rho_0\varphi_1(T) - \Lambda(T)\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial a} + \dfrac{\partial\eta}{\partial b} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial c}\right) - 2M(T)\dfrac{\partial\eta}{\partial b}, \\ N_z = -\rho_0\varphi_1(T) - \Lambda(T)\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial a} + \dfrac{\partial\eta}{\partial b} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial c}\right) - 2M(T)\dfrac{\partial\zeta}{\partial c}, \\ T_x = -M(T)\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial c} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial b}\right), \\ T_y = -M(T)\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial a} + \dfrac{\partial\xi}{\partial c}\right), \\ T_z = -M(T)\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial b} + \dfrac{\partial\eta}{\partial a}\right). \end{cases}$$

Or, la déformation infiniment petite dont

$$(11)\qquad D'_1\,dt,\quad D'_2\,dt,\quad D'_3\,dt,\quad G'_1\,dt,\quad G'_2\,dt,\quad G'_3\,dt$$

sont les composantes peut se ramener à trois dilatations $\mathfrak{D}'_1\,dt$, $\mathfrak{D}'_2\,dt$, $\mathfrak{D}'_3\,dt$ suivant trois certains axes rectangulaires; rien ne nous empêche de supposer que ces axes sont ceux auxquels il faut rapporter la déformation (11) pour obtenir la déformation

$$\Delta'_1\,dt,\quad \Delta'_2\,dt,\quad \Delta'_3\,dt,\quad \Gamma'_1\,dt,\quad \Gamma'_2\,dt,\quad \Gamma'_3\,dt,$$

cas auquel nous aurons

$$(12)\qquad \begin{cases} \Delta'_1 = \mathfrak{D}'_1, & \Delta'_2 = \mathfrak{D}'_2, & \Delta'_3 = \mathfrak{D}'_3, \\ \Gamma'_1 = 0, & \Gamma'_2 = 0, & \Gamma'_3 = 0. \end{cases}$$

Si nous posons alors

$$a(0, 0, 0) = A(T),$$
$$b(0, 0, 0) - a(0, 0, 0) = B(T),$$

l'égalité (74) de la première Partie deviendra

$$(13)\qquad \mathfrak{F} = A(T)(\mathfrak{D}'_1 + \mathfrak{D}'_2 + \mathfrak{D}'_3)^2 + 2B(T)(\mathfrak{D}'_2\mathfrak{D}'_3 + \mathfrak{D}'_3\mathfrak{D}'_1 + \mathfrak{D}'_1\mathfrak{D}'_2).$$

D'autre part, on sait que $\mathfrak{D}'_1$, $\mathfrak{D}'_2$, $\mathfrak{D}'_3$ sont les trois racines de l'équation [*Recherches sur l'Hydrodynamique*, 1re série, première Partie, égalité (29)]

$$\begin{vmatrix} D'_1 - \mathfrak{D} & G'_3 & G'_2 \\ G'_3 & D'_2 - \mathfrak{D} & G'_1 \\ G'_2 & G'_1 & D'_3 - \mathfrak{D} \end{vmatrix} = 0$$

ou bien

$$(14)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{D}^3 - (D'_1 + D'_2 + D'_3)\mathfrak{D}^2 + (D'_2D'_3 + D'_3D'_1 + D'_1D'_2 - G'^2_1 - G'^2_2 - G'^2_3)\mathfrak{D} \\ - (D'_1D'_2D'_3 + 2G'_1G'_2G'_3 - D'_1G'^2_1 - D'_2G'^2_2 - D'_3G'^2_3) = 0. \end{aligned}$$

L'égalité (13) devient alors

$$(15)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{F} = {} & A(T)(D'_1 + D'_2 + D'_3)^2 \\ & + 2B(T)(D'_2D'_3 + D'_3D'_1 + D'_1D'_2 - G'^2_1 - G'^2_2 - G'^2_3). \end{aligned}$$

II. — Équations des petits mouvements d'un solide vitreux [1].

Le travail virtuel des actions d'inertie ne change pas de forme lorsque l'on suppose que ξ, η, ζ sont des quantités très petites; il continue à être donné par l'égalité (72) de la première Partie; au contraire l'expression du travail virtuel de la viscosité subit de grandes simplifications.

L'expression de la fonction dissipative $\mathcal{F}$, qui détermine l'expression de ce travail virtuel, dépend :

1° De l'état de déformation du système au point (x, y, z) et à l'instant t;

2° Des vitesses de déformation D'_1, D'_2, D'_3, G'_1, G'_2, G'_3 qui déterminent la variation que subit la déformation au point (x, y, z) entre les instants t et $(t + dt)$.

La fonction dissipative est, d'après les égalités (73) et (74) de la première Partie, une forme quadratique de ces six dernières variables, les coefficients de cette forme dépendant de la déformation au point (x, y, z) et à l'instant t.

Si, sans changer les valeurs de D'_1, D'_2, D'_3, G'_1, G'_2, G'_3, on supposait la déformation au point (x, y, z), à l'instant t, infiniment peu différente de ce qu'elle est en réalité, il est clair que l'on altérerait $\mathcal{F}$ d'une quantité infiniment petite par rapport à elle-même.

Or, dans le cas qui nous occupe en ce moment, le milieu à l'instant t est infiniment peu déformé; nous pourrons donc, pour déterminer $\mathcal{F}$, raisonner comme si l'état du milieu à l'instant t était identique à l'état initial.

Or, dans l'état initial non déformé, on peut regarder trois droites rectangulaires quelconques comme étant les trois axes de dilatation. Il nous est donc loisible, dans la formule (74) de la première Partie, de regarder Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3, Γ'_1, Γ'_2, Γ'_3 comme les vitesses de déformation *rapportées à trois axes rectangulaires quelconques*; la valeur de $\mathcal{F}$ devra être indépendante du choix de ces axes.

---

[1] *Sur le mouvement des milieux vitreux, affectés de viscosité, et très peu déformés* (*Comptes rendus*, t. CXXXVI, p. 592, 9 mars 1903).

point du milieu, deviendront

$$
(20) \quad \begin{cases}
\dfrac{\partial(N_x+\nu_x)}{\partial a}+\dfrac{\partial(T_z-\tau_z)}{\partial b}+\dfrac{\partial(T_y+\tau_y)}{\partial c}=\rho_0\left(X_i+X_e-\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right),\\
\dfrac{\partial(T_z+\tau_z)}{\partial a}+\dfrac{\partial(N_y+\nu_y)}{\partial b}+\dfrac{\partial(T_x+\tau_x)}{\partial c}=\rho_0\left(Y_i+Y_e-\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right),\\
\dfrac{\partial(T_y+\tau_y)}{\partial a}+\dfrac{\partial(T_x+\tau_x)}{\partial b}+\dfrac{\partial(N_z+\nu_z)}{\partial c}=\rho_0\left(Z_i+Z_e-\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right),
\end{cases}
$$

tandis que, selon les équations (81) de la première Partie, on devra avoir, en chaque point de la surface primitive,

$$
(21) \quad \begin{cases}
(N_x+\nu_x)\alpha+(T_z+\tau_z)\beta+(T_y+\tau_y)\gamma=P_x,\\
(T_z+\tau_z)\alpha+(N_y+\nu_y)\beta+(T_x+\tau_x)\gamma=P_y,\\
(T_y+\tau_y)\alpha+(T_x+\tau_x)\beta+(N_z+\nu_z)\gamma=P_z.
\end{cases}
$$

A ces égalités, il faudra joindre l'équation de continuité qui sera, selon les égalités (22) de la première Partie et (2) de la seconde Partie,

$$\rho_0-\rho=\rho\left(\frac{\partial\xi}{\partial a}+\frac{\partial\eta}{\partial b}+\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right)$$

ou, en négligeant un infiniment petit du second ordre,

$$(22) \quad \rho-\rho_0=-\rho_0\left(\frac{\partial\xi}{\partial a}+\frac{\partial\eta}{\partial b}+\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right).$$

III. — Quantité de chaleur dégagée dans une petite déformation d'un solide vitreux peu écarté de l'état initial.

Les égalités (86) de la première Partie et (3) de la seconde Partie permettent d'écrire cette quantité de chaleur sous la forme

$$
(23) \quad \begin{aligned}
dQ=-\Big[&\rho_0 c\,\delta T+\left(\rho_0 e_1+\frac{\nu_x}{E}\right)\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a}+\left(\rho_0 e_2+\frac{\nu_y}{E}\right)\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial b}+\left(\rho_0 e_3+\frac{\nu_z}{E}\right)\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial c}\\
&+\left(\rho_0 g_1+\frac{\tau_x}{E}\right)\left(\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial c}+\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial b}\right)\\
&+\left(\rho_0 g_2+\frac{\tau_y}{E}\right)\left(\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial a}+\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial c}\right)+\left(\rho_0 g_3+\frac{\tau_z}{E}\right)\left(\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial b}+\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial a}\right)\Big]\,d\varpi,
\end{aligned}
$$

tandis que les égalités (85) de la première Partie et (1), (4) et (5) de la seconde Partie donnent

$$
(24)\quad \left\{
\begin{aligned}
\rho_0 e_1 &= -\frac{T}{E}\left[\rho_0 \frac{d\varphi_1(T)}{dT} + \frac{d\Lambda(T)}{dT}\left(\frac{\partial\xi}{\partial a} + \frac{\partial\eta}{\partial b} + \frac{\partial\zeta}{\partial c}\right) + 2\,\frac{dM(T)}{dT}\,\frac{\partial\xi}{\partial a}\right],\\
\rho_0 e_2 &= -\frac{T}{E}\left[\rho_0 \frac{d\varphi_1(T)}{dT} + \frac{d\Lambda(T)}{dT}\left(\frac{\partial\xi}{\partial a} + \frac{\partial\eta}{\partial b} + \frac{\partial\zeta}{\partial c}\right) + 2\,\frac{dM(T)}{dT}\,\frac{\partial\eta}{\partial b}\right],\\
\rho_0 e_3 &= -\frac{T}{E}\left[\rho_0 \frac{d\varphi_3(T)}{dT} + \frac{d\Lambda(T)}{dT}\left(\frac{\partial\xi}{\partial a} + \frac{\partial\eta}{\partial b} + \frac{\partial\xi}{\partial c}\right) + 2\,\frac{dM(T)}{dT}\,\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right],\\
\rho_0 g_1 &= -\frac{T}{E}\,\frac{dM(T)}{dT}\left(\frac{\partial\eta}{\partial c} + \frac{\partial\zeta}{\partial b}\right),\\
\rho_0 g_2 &= -\frac{T}{E}\,\frac{dM(T)}{dT}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial a} + \frac{\partial\xi}{\partial c}\right),\\
\rho_0 g_3 &= -\frac{T}{E}\,\frac{dM(T)}{dT}\left(\frac{\partial\xi}{\partial b} + \frac{\partial\eta}{\partial a}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Si l'on veut exprimer la quantité de chaleur dégagée dans une modification réelle ou virtuelle, on voit que l'infiniment petit principal de cette quantité se réduit à

$$
(25)\qquad dQ = -\rho_0\left[c\,\delta T - \frac{T}{E}\,\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\left(\frac{\partial\delta\xi}{\partial a} + \frac{\partial\delta\eta}{\partial b} + \frac{\partial\delta\zeta}{\partial c}\right)\right] d\varpi.
$$

Les trois quantités σ_1, σ_2, σ_3 sont sensiblement égales entre elles et égales à 1; on a donc

$$
k(T, \sigma_1, \sigma_2,) = k(T, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_1) = k(T, \sigma_3, \sigma_1, \sigma_2) = k(T).
$$

Si l'on observe en outre que l'on a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X}_1^2 + \mathcal{X}_2^2 + \mathcal{X}_3^2 &= 1,\\
\mathcal{Y}_1^2 + \mathcal{Y}_2^2 + \mathcal{Y}_3^2 &= 1,\\
\mathcal{Z}_1^2 + \mathcal{Z}_2^2 + \mathcal{Z}_3^2 &= 1,\\
\mathcal{Y}_1\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Y}_2\mathcal{Z}_2 + \mathcal{Y}_3\mathcal{Z}_3 &= 0,\\
\mathcal{Z}_1\mathcal{X}_1 + \mathcal{Z}_2\mathcal{X}_2 + \mathcal{Z}_3\mathcal{X}_3 &= 0,\\
\mathcal{X}_1\mathcal{Y}_1 + \mathcal{X}_2\mathcal{Y}_2 + \mathcal{X}_3\mathcal{Y}_3 &= 0,
\end{aligned}
$$

on voit que les égalités (90) de la première Partie deviennent

$$K_x = K_y = K_z = k(T),$$
$$C_x = C_y = C_z = 0.$$

On a, d'ailleurs, en supposant que $\frac{\partial T}{\partial a}, \frac{\partial T}{\partial b}, \frac{\partial T}{\partial c}$ soient infiniment petits comme ξ, η, ζ, et en se bornant aux infiniment petits principaux,

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial a}, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial b}, \qquad \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial c},$$

et l'égalité (93) de la première Partie prend la forme

$$(26) \qquad dQ = -k(T)\left(\frac{\partial^2 T}{\partial a^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial b^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial c^2}\right) d\varpi\, dt.$$

La comparaison des égalités (25) et (26) donne la relation supplémentaire

$$(27) \quad \rho_0 c \frac{\partial T}{\partial t} - \rho_0 \frac{T}{E} \frac{d\varphi_1(T)}{dT} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial a} - \frac{\partial \eta}{\partial b} - \frac{\partial \zeta}{\partial c}\right) - k(T)\left(\frac{\partial^2 T}{\partial a^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial b^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial c^2}\right) = 0.$$

IV. — Problème de M. O.-E. Meyer.

Nous allons simplifier encore le problème qui nous occupe au moyen des hypothèses suivantes :

1° Les actions auxquelles le milieu est soumis sont purement superficielles, en sorte que l'on a, en tout point,

$$(28) \qquad X_i + X_e = 0, \qquad Y_i + Y_e = 0, \qquad Z_i + Z_e = 0;$$

2° La température est uniforme et constante pendant toute la durée du mouvement, en sorte qu'il est inutile de la faire figurer dans les équations et que l'on a, en outre,

$$(29) \qquad \varphi_1(T) = \text{const.}$$

Dans ces conditions, les équations des petits mouvements d'un

tandis que les égalités (85) de la première Partie et (1), (4) et (5) de la seconde Partie donnent

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned}
\rho_0 e_3 &= -\frac{T}{E}\left[\rho_0 \frac{d\varphi_1(T)}{dT} + \frac{d\Lambda(T)}{dT}\left(\frac{\partial\xi}{\partial a} + \frac{\partial\eta}{\partial b} + \frac{\partial\zeta}{\partial c}\right) + 2\,\frac{dM(T)}{dT}\,\frac{\partial\xi}{\partial a}\right],\\
\rho_0 e_2 &= -\frac{T}{E}\left[\rho_0 \frac{d\varphi_1(T)}{dT} + \frac{d\Lambda(T)}{dT}\left(\frac{\partial\xi}{\partial a} + \frac{\partial\eta}{\partial b} + \frac{\partial\zeta}{\partial c}\right) + 2\,\frac{dM(T)}{dT}\,\frac{\partial\eta}{\partial b}\right],\\
\rho_0 e_3 &= -\frac{T}{E}\left[\rho_0 \frac{d\varphi_3(T)}{dT} + \frac{d\Lambda(T)}{dT}\left(\frac{\partial\xi}{\partial a} + \frac{\partial\eta}{\partial b} + \frac{\partial\xi}{\partial c}\right) + 2\,\frac{dM(T)}{dT}\,\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right],\\
\rho_0 g_1 &= -\frac{T}{E}\,\frac{dM(T)}{dT}\left(\frac{\partial\eta}{\partial c} + \frac{\partial\zeta}{\partial b}\right),\\
\rho_0 g_2 &= -\frac{T}{E}\,\frac{dM(T)}{dT}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial a} + \frac{\partial\xi}{\partial c}\right),\\
\rho_0 g_3 &= -\frac{T}{E}\,\frac{dM(T)}{dT}\left(\frac{\partial\xi}{\partial b} + \frac{\partial\eta}{\partial a}\right).
\end{aligned}\right.$$

Si l'on veut exprimer la quantité de chaleur dégagée dans une modification réelle ou virtuelle, on voit que l'infiniment petit principal de cette quantité se réduit à

$$(25)\qquad dQ = -\rho_0\left[c\,\delta T - \frac{T}{E}\,\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\left(\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a} + \frac{\partial\,\delta\eta}{\partial b} + \frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial c}\right)\right] d\varpi.$$

Les trois quantités σ_1, σ_2, σ_3 sont sensiblement égales entre elles et égales à 1; on a donc

$$k(T, \sigma_1, \sigma_2,) = k(T, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_1) = k(T, \sigma_3, \sigma_1, \sigma_2) = k(T).$$

Si l'on observe en outre que l'on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_1^2 + \mathcal{X}_2^2 + \mathcal{X}_3^2 &= 1,\\
\mathcal{Y}_1^2 + \mathcal{Y}_2^2 + \mathcal{Y}_3^2 &= 1,\\
\mathcal{Z}_1^2 + \mathcal{Z}_2^2 + \mathcal{Z}_3^2 &= 1,\\
\mathcal{Y}_1\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Y}_2\mathcal{Z}_2 + \mathcal{Y}_3\mathcal{Z}_3 &= 0,\\
\mathcal{Z}_1\mathcal{X}_1 + \mathcal{Z}_2\mathcal{X}_2 + \mathcal{Z}_3\mathcal{X}_3 &= 0,\\
\mathcal{X}_1\mathcal{Y}_1 + \mathcal{X}_2\mathcal{Y}_2 + \mathcal{X}_3\mathcal{Y}_3 &= 0,
\end{aligned}$$

La stabilité de l'état d'équilibre pris pour état initial équivaut, comme l'on sait (Voir plus loin, Chapitre II), aux conditions

(34)
$$\left\{\begin{array}{l} 3\Lambda - 2M > 0, \\ \qquad M > 0, \\ \text{partant} \\ \Lambda - 2M > 0, \end{array}\right.$$

tandis que les conditions de signe imposées à la fonction dissipative équivalent aux inégalités [*Recherches sur l'Hydrodynamique*, 1re série, Ire Partie, inégalités (37), (38) et 39)]

(35)
$$\left\{\begin{array}{l} 3\lambda - 2\mu > 0, \\ \qquad \mu > 0, \\ \text{partant} \\ \lambda - 2\mu > 0. \end{array}\right.$$

Les deux équations (32) et (33) sont donc toutes deux du type

(36)
$$A\frac{\partial}{\partial t}\Delta V - B\Delta V - C\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0,$$

où l'on a

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial a^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial c^2}$$

et où A, B, C sont trois quantités positives.

Nous avons à plusieurs reprises attiré l'attention sur cette équation (1), qui joue un rôle essentiel dans diverses questions de Physique mathématique.

Soit Σ une surface tracée dans l'espace des a, b, c; peut-elle être, pour la fonction V, une onde du troisième ordre ?

La surface Σ partage l'espace en deux régions, que nous désignerons par 1 et 2. Si nous menons à la surface Σ une demi-normale

(1) *Sur la théorie électrodynamique de Helmholtz et la théorie électromagnétique de la lumière* (*Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles*, série II, t. V, 1901, p. 227). — *Recherches sur l'Hydrodynamique*, 1re série, 2e Partie, équation (106).

solide vitreux deviennent, en vertu des égalités (8), (19) et (20),

$$(30)\quad \begin{cases} (\Lambda+\mathrm{M})\dfrac{\partial}{\partial a}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial a}+\dfrac{\partial\eta}{\partial b}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial c}\right)+\mathrm{M}\,\Delta\xi \\ \quad +(\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial a\,\partial t}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial a}+\dfrac{\partial\eta}{\partial b}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial c}\right)+\mu\dfrac{\partial}{\partial t}\Delta\xi-\rho_0\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=0, \\ (\Lambda+\mathrm{M})\dfrac{\partial}{\partial b}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial a}+\dfrac{\partial\eta}{\partial b}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial c}\right)+\mathrm{M}\,\Delta\eta \\ \quad +(\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial b\,\partial t}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial a}+\dfrac{\partial\eta}{\partial b}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial c}\right)+\mu\dfrac{\partial}{\partial t}\Delta\eta-\rho_0\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=0, \\ (\Lambda+\mathrm{M})\dfrac{\partial}{\partial c}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial a}+\dfrac{\partial\eta}{\partial b}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial c}\right)+\mathrm{M}\,\Delta\zeta \\ \quad +(\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial c\,\partial t}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial a}+\dfrac{\partial\eta}{\partial b}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial c}\right)+\mu\dfrac{\partial}{\partial t}\Delta\zeta-\rho_0\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=0. \end{cases}$$

Si l'on faisait, dans ces égalités,

$$(31)\qquad \Lambda=\mathrm{M},\qquad \lambda=\mu,$$

on retrouverait les équations que M. O.-E. Meyer (¹) a obtenues au moyen de considérations moléculaires.

Ces équations sont du type auquel s'applique le théorème de Clebsch généralisé (²); la formation de leur intégrale générale se ramène à la formation de l'intégrale générale de l'*équation aux dilatations* et de l'intégrale générale de l'*équation aux rotations*.

L'*équation aux dilatations* est

$$(32)\qquad (\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial t}\Delta\theta+(\Lambda+2\mathrm{M})\Delta\theta-\rho_0\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=0.$$

L'*équation aux rotations* est

$$\mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta\omega+\mathrm{M}\,\Delta\omega-\rho_0\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}=0.$$

(¹) O.-E. MEYER, *Zur Theorie der inneren Reibung* (*Borchardt's Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. LXXVIII, 1874, p. 130).

(²) *Sur la généralisation d'un théorème de Clebsch* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5ᵉ série, t. VI, 1900, p. 213).

s'annulent sur la surface Σ, sauf les dérivées

$$\frac{\partial^3 V}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r}, \qquad p + q + r = 3.$$

Ainsi, *les seules ondes du troisième ordre que puisse admettre une intégrale V de l'équation (36) sont des ondes immobiles au travers desquelles toutes les dérivées du troisième ordre de V varient d'une manière continue, sauf celles qui ne résultent d'aucune différentiation par rapport à t.*

Toute intégrale de l'équation (36) vérifie aussi les équations que l'on en déduit par des différentiations successives. Dès lors, on peut étendre le théorème précédent en lui donnant la forme que voici :

Les seules ondes d'ordre n ($n \geqq 3$) que puisse admettre une intégrale V de l'équation (36) sont des ondes immobiles au travers desquelles les seules dérivées d'ordre n de la fonction V qui soient discontinues sont celles qui s'obtiennent sans aucune dérivation par rapport à t.

Selon le théorème de Clebsch généralisé, toute intégrale des équations (30) peut se mettre sous la forme

$$(40) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{\partial \Theta}{\partial a} - \frac{\partial Q}{\partial c} - \frac{\partial R}{\partial b}, \\ \eta &= \frac{\partial \Theta}{\partial b} - \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{\partial P}{\partial b}, \\ \zeta &= \frac{\partial \Theta}{\partial c} - \frac{\partial P}{\partial b} - \frac{\partial Q}{\partial a}, \end{aligned} \right.$$

Θ étant une intégrale de l'équation (32) et P, Q, R trois intégrales de l'équation (33), liées entre elles par la relation

$$(41) \qquad \frac{\partial P}{\partial a} - \frac{\partial Q}{\partial b} + \frac{\partial R}{\partial c} = 0.$$

Il est clair que pour qu'une surface Σ soit onde d'ordre n pour les fonctions ξ, η, ζ, il faut qu'elle soit onde d'ordre $(n + 1)$ pour l'une au moins des fonctions Θ, P, Q, R et d'ordre égal ou supérieur à $(n - 1)$ pour les autres. D'où la conclusion suivante :

Une surface Σ ne peut être onde d'ordre n ($n \geqq 2$) par rapport aux fonctions ξ, η, ζ, que si elle est immobile dans l'espace des a, b, c.

D'ailleurs, d'après ce que nous avons vu, une onde d'ordre $n (n \geqq 3)$ par rapport à l'une des fonctions Θ, P, Q, R est aussi d'ordre au moins égal à n par rapport à sa dérivée par rapport à t: $\frac{\partial \Theta}{\partial t}$, $\frac{\partial P}{\partial t}$, $\frac{\partial Q}{\partial t}$, $\frac{\partial R}{\partial t}$.

D'autre part, les égalités (40) nous donnent

$$(42) \quad \begin{cases} u = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial a \partial t} + \frac{\partial^2 Q}{\partial c \partial t} - \frac{\partial^2 R}{\partial b \partial t}, \\ v = \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial b \partial t} + \frac{\partial^2 R}{\partial a \partial t} - \frac{\partial^2 P}{\partial c \partial t}, \\ w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial c \partial t} + \frac{\partial^2 P}{\partial b \partial t} - \frac{\partial^2 Q}{\partial a \partial t}. \end{cases}$$

Nous voyons alors que *toute onde d'ordre n* $(n \geqq 2)$ *pour les fonctions* ξ, η, ζ *est, en général, onde d'ordre n pour les composantes* u, v, w *de la vitesse.*

En revanche, *elle est, en général, onde d'ordre* $(n-1)$ *pour les dérivées partielles de* ζ, η, ζ, *par rapport à* a, b, c, *partant, selon les égalités* (8), *pour les quantités* N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z.

En résumé, *si l'on considère les petits mouvements d'un milieu vitreux, affecté de viscosité, très peu écarté de l'état initial et soumis aux conditions imaginées par M. O.-E. Meyer, ces petits mouvements peuvent présenter des ondes. Ces ondes, d'ordre n* $(n \geqq 2)$ *pour les composantes* u, v, w *de la vitesse, sont en général d'ordre* $(n-1)$ *pour les quantités* N_i, T_i. *Pendant toute la durée du mouvement, elles séparent les mêmes masses matérielles.*

CHAPITRE II.

DE LA PROPAGATION DES ONDES DANS LES MILIEUX VITREUX TRÈS PEU DÉFORMÉS [1].

I. — Des ondes du second ordre en u, v, w, dans un milieu vitreux très peu écarté de l'état initial, animé de mouvements très petits et conducteur de la chaleur.

Le théorème précédent est soumis à certaines restrictions, celles-là mêmes qui définissent le problème de M. O.-E. Meyer. Nous allons le généraliser en nous servant, pour le démontrer, non plus des formules que renferme le paragraphe 4 du Chapitre I, mais des formules qui ont été données aux trois premiers paragraphes du même Chapitre.

Considérons, dans l'espace des a, b, c, une surface fixe ou variable Σ qui soit onde d'ordre ν pour ξ, η, ζ. Cette surface sépare l'espace en deux régions 1 et 2; la normale, menée de la région 1 à la région 2, fait avec les axes de coordonnées des angles l, m, n.

Du côté 1 de la surface Σ, les fonctions ξ, η, ζ admettent les déterminations analytiques ξ_1, η_1, ζ_1; du côté 2, elles admettent les déterminations analytiques ξ_2, η_2, ζ_2. Posons

$$\xi_2 - \xi_1 = \mathrm{F}, \qquad \eta_2 - \eta_1 = \mathrm{G}, \qquad \zeta_2 - \zeta_1 = \mathrm{H}. \tag{43}$$

Toutes les dérivées partielles de F, G, H, par rapport à a, b, c, t, jusqu'à l'ordre $(\nu - 1)$ inclusivement, s'annulent sur la surface Σ. Il n'en est pas de même des dérivées d'ordre ν. Selon les lemmes de M. Hadamard (*Voir* nos *Recherches sur l'Hydrodynamique*, 1re série, 2e Partie, Chapitre II, § 5), il existe un vecteur $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, défini en

---

[1] *Sur les ondes au sein d'un milieu vitreux affecté de viscosité et très peu déformé* (*Comptes rendus*, t. CXXXVI, 23 mars 1903, p. 733).

D'ailleurs, d'après ce que nous avons vu, une onde d'ordre $n\,(n \geqq 3)$ par rapport à l'une des fonctions Θ, P, Q, R est aussi d'ordre au moins égal à n par rapport à sa dérivée par rapport à t : $\frac{\partial \Theta}{\partial t}$, $\frac{\partial P}{\partial t}$, $\frac{\partial Q}{\partial t}$, $\frac{\partial R}{\partial t}$.

D'autre part, les égalités (40) nous donnent

$$(42)\quad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial a\, \partial t} + \frac{\partial^2 Q}{\partial c\, \partial t} - \frac{\partial^2 R}{\partial b\, \partial t}, \\ v &= \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial b\, \partial t} + \frac{\partial^2 R}{\partial a\, \partial t} - \frac{\partial^2 P}{\partial c\, \partial t}, \\ w &= \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial c\, \partial t} + \frac{\partial^2 P}{\partial b\, \partial t} - \frac{\partial^2 Q}{\partial a\, \partial t}. \end{aligned} \right.$$

Nous voyons alors que *toute onde d'ordre n* $(n \geqq 2)$ *pour les fonctions* ξ, η, ζ *est, en général, onde d'ordre n pour les composantes* u, v, w *de la vitesse.*

En revanche, *elle est, en général, onde d'ordre* $(n-1)$ *pour les dérivées partielles de* ζ, η, ζ, *par rapport à* a, b, c, *partant, selon les égalités* (8), *pour les quantités* N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z.

En résumé, *si l'on considère les petits mouvements d'un milieu vitreux, affecté de viscosité, très peu écarté de l'état initial et soumis aux conditions imaginées par M. O.-E. Meyer, ces petits mouvements peuvent présenter des ondes. Ces ondes, d'ordre n* $(n \geqq 2)$ *pour les composantes* u, v, w *de la vitesse, sont en général d'ordre* $(n-1)$ *pour les quantités* N_i, T_i. *Pendant toute la durée du mouvement, elles séparent les mêmes masses matérielles.*

que toute surface Σ qui est onde d'ordre ν pour ξ, η, ζ est onde d'ordre $(\nu - 1)$ pour ω et pour ρ. D'où la proposition suivante :

Si une onde se propage dans le milieu de telle sorte qu'elle n'en sépare pas sans cesse les deux mêmes parties, cette onde est du même ordre pour la densité ρ et pour les composantes u, v, w de la vitesse ; si, au contraire, elle sépare sans cesse les deux mêmes parties du milieu, son ordre pour les composantes u, v, w de la vitesse surpasse au moins d'une unité son ordre pour la densité ρ.

Ces énoncés, entièrement généraux, ne supposent nullement qu'il s'agisse d'un milieu vitreux très peu écarté de son état initial. Il n'en est plus de même de ce qui va suivre.

Selon l'égalité (27), qui peut s'écrire

$$(27\ bis)\qquad \rho_0 c\frac{\partial T}{\partial t} - \rho_0 \frac{T}{E}\frac{d\varphi_1(T)}{\partial T}\left(\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial c}\right) - k(T)\left(\frac{\partial^2 T}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial c^2}\right) = 0,$$

l'ordre de l'onde Σ sera, par rapport à T, supérieur au moins d'une unité à l'ordre de cette onde par rapport à u, v, w, *pourvu que l'on suppose différent de* 0 *le coefficient de conductibilité* $k(T)$.

Commençons par examiner *quelles sont les ondes du second ordre par rapport à u, v, w qui peuvent persister dans un milieu vitreux très peu écarté de l'état initial.*

Posons

$$(47)\qquad u_2 - u_1 = U, \qquad v_2 - v_1 = V, \qquad w_2 - w_1 = W.$$

Il existera, en chaque point de la surface Σ, un vecteur $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ tel que

$$(48)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial a^p\, \partial b^q\, \partial c^r\, \partial t^s} &= (-\mathfrak{N})^s l^p m^q n^r \mathfrak{U}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial a^p\, \partial b^q\, \partial c^r\, \partial t^s} &= (-\mathfrak{N})^s l^p m^q n^r \mathfrak{V}, \qquad (p+q+r+s=2). \\ \frac{\partial^2 W}{\partial a^p\, \partial b^q\, \partial c^r\, \partial t^s} &= (-\mathfrak{N})^s l^p m^q n^r \mathfrak{W}, \end{aligned}\right.$$

Moyennant ces égalités (48), et en observant que la surface Σ est au moins onde du troisième ordre pour la température T, les égalités (19) nous donnent

$$
(49) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial(\nu_{x2}-\nu_{x1})}{\partial a}+\frac{\partial(\tau_{z2}-\tau_{z1})}{\partial b}+\frac{\partial(\tau_{y2}-\tau_{y1})}{\partial c}\\
&\qquad =-(\lambda+\mu)(l\mathfrak{U}+m\mathfrak{V}+n\mathfrak{W})l-\mu\mathfrak{U},\\
&\frac{\partial(\tau_{z2}-\tau_{z1})}{\partial a}+\frac{\partial(\nu_{y2}-\nu_{y1})}{\partial b}+\frac{\partial(\tau_{x2}-\tau_{x1})}{\partial c}\\
&\qquad =-(\lambda+\mu)(l\mathfrak{U}+m\mathfrak{V}+n\mathfrak{W})m-\mu\mathfrak{V},\\
&\frac{\partial(\tau_{y2}-\tau_{y1})}{\partial a}=\frac{\partial(\tau_{x2}-\tau_{x1})}{\partial b}+\frac{\partial(\nu_{z2}-\nu_{z1})}{\partial c}\\
&\qquad =-(\lambda+\mu)(l\mathfrak{U}+m\mathfrak{V}+n\mathfrak{W})n-\mu\mathfrak{W}.
\end{aligned}
\right.
$$

Les quantités

$$
\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{\partial u}{\partial t},\qquad \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=\frac{\partial v}{\partial t},\qquad \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=\frac{\partial w}{\partial t}
$$

varient d'une manière continue en traversant la surface Σ.

Si $\mathfrak{M}$ est différent de o, l'onde considérée est du troisième ordre en ξ, η, ζ; si $\mathfrak{M}$ est égal à o, elle peut être seulement du second ordre en ξ, η, ζ; dans un cas comme dans l'autre, les quantités

$$
X_i+X_e,\quad Y_i+Y_e,\quad Z_i+Z_e
$$

varient d'une manière continue au travers de la surface Σ.

Supposons d'abord $\mathfrak{M}$ différent de o.

La surface Σ est alors onde du troisième ordre par rapport à ξ, η, ζ; les formules (8) nous montrent qu'elle est onde du second ordre par rapport aux quantités

$$
N_x,\quad N_y,\quad N_z,\quad T_x,\quad T_y,\quad T_z.
$$

Dès lors, les égalités (20) nous enseignent que l'on a, en tout point

de la surface Σ,

$$
(20\ bis)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial(\nu_{x2}-\nu_{x1})}{\partial a}+\dfrac{\partial(\tau_{z2}-\tau_{z1})}{\partial b}+\dfrac{\partial(\tau_{y2}-\tau_{y1})}{\partial c}=0,\\[2mm]
\dfrac{\partial(\tau_{z2}-\tau_{z1})}{\partial a}+\dfrac{\partial(\nu_{y2}-\nu_{y1})}{\partial b}+\dfrac{\partial(\tau_{x2}-\tau_{x1})}{\partial c}=0,\\[2mm]
\dfrac{\partial(\tau_{y2}-\tau_{y1})}{\partial a}+\dfrac{\partial(\tau_{x2}-\tau_{x1})}{\partial b}+\dfrac{\partial(\nu_{z2}-\nu_{z1})}{\partial c}=0
\end{cases}
$$

ou bien, en vertu des égalités (49),

$$
(50)\quad \begin{cases}
(\lambda+\mu)(l\mathfrak{U}+m\mathfrak{V}+n\mathfrak{W})l\ +\mu\mathfrak{U}\ =0,\\
(\lambda+\mu)(l\mathfrak{U}+m\mathfrak{V}+n\mathfrak{W})m+\mu\mathfrak{V}=0,\\
(\lambda+\mu)(l\mathfrak{U}+m\mathfrak{V}+n\mathfrak{W})n\ +\mu\mathfrak{W}=0.
\end{cases}
$$

Multiplions respectivement ces égalités par l, m, n et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons

$$(\lambda+2\mu)(l\mathfrak{U}+m\mathfrak{V}+n\mathfrak{W})=0$$

ou bien, en vertu de la dernière inégalité (35),

$$l\mathfrak{U}+m\mathfrak{V}+n\mathfrak{W}=0.$$

Ce résultat, reporté dans les égalités (50), donne

$$\mu\mathfrak{U}=0,\qquad \mu\mathfrak{V}=0,\qquad \mu\mathfrak{W}=0$$

ou bien, en vertu de la seconde inégalité (35),

$$\mathfrak{U}=0,\qquad \mathfrak{V}=0,\qquad \mathfrak{W}=0.$$

Ainsi, *un milieu vitreux très peu écarté de l'état initial et affecté de viscosité ne peut présenter aucune onde, du second ordre par rapport aux vitesses, qui ne séparerait pas constamment les deux mêmes masses matérielles.*

On remarquera que la démonstration de cette proposition suppose l'emploi des inégalités (35); *cette proposition pourrait donc être en défaut si le milieu était dénué de viscosité.*

Moyennant ces égalités (48), et en observant que la surface Σ est au moins onde du troisième ordre pour la température T, les égalités (19) nous donnent

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial(\nu_{x2}-\nu_{x1})}{\partial a}+\frac{\partial(\tau_{z2}-\tau_{z1})}{\partial b}+\frac{\partial(\tau_{y2}-\tau_{y1})}{\partial c}\\ &\quad=-(\lambda+\mu)(l\mathfrak{U}+m\mathfrak{V}+n\mathfrak{W})l-\mu\mathfrak{U},\\ &\frac{\partial(\tau_{z2}-\tau_{z1})}{\partial a}+\frac{\partial(\nu_{y2}-\nu_{y1})}{\partial b}+\frac{\partial(\tau_{x2}-\tau_{x1})}{\partial c}\\ &\quad=-(\lambda+\mu)(l\mathfrak{U}+m\mathfrak{V}+n\mathfrak{W})m-\mu\mathfrak{V},\\ &\frac{\partial(\tau_{y2}-\tau_{y1})}{\partial a}=\frac{\partial(\tau_{x2}-\tau_{x1})}{\partial b}+\frac{\partial(\nu_{z2}-\nu_{z1})}{\partial c}\\ &\quad=-(\lambda+\mu)(l\mathfrak{U}+m\mathfrak{V}+n\mathfrak{W})n-\mu\mathfrak{W}. \end{aligned}\right.$$

Les quantites

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{\partial u}{\partial t},\qquad \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=\frac{\partial v}{\partial t},\qquad \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=\frac{\partial w}{\partial t}$$

varient d'une manière continue en traversant la surface Σ.

Si $\mathfrak{M}$ est différent de o, l'onde considérée est du troisième ordre en ξ, η, ζ; si $\mathfrak{M}$ est égal à o, elle peut être seulement du second ordre en ξ, η, ζ; dans un cas comme dans l'autre, les quantités

$$X_i+X_e,\quad Y_i+Y_e,\quad Z_i+Z_e$$

varient d'une manière continue au travers de la surface Σ.

Supposons d'abord $\mathfrak{M}$ différent de o.

La surface Σ est alors onde du troisième ordre par rapport à ξ, η, ζ; les formules (8) nous montrent qu'elle est onde du second ordre par rapport aux quantités

$$N_x,\quad N_y,\quad N_z,\quad T_x,\quad T_y,\quad T_z.$$

Dès lors, les égalités (20) nous enseignent que l'on a, en tout point

ou bien, en vertu des égalités (49) et (52),

$$(53)\quad \begin{cases} (\Lambda+M)(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})l + M\mathcal{F} + (\lambda+\mu)(l\mathfrak{U}+m\mathfrak{V}+n\mathfrak{W})l + \mu\mathfrak{U} = 0, \\ (\Lambda+M)(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})m + M\mathcal{G} + (\lambda+\mu)(l\mathfrak{U}+m\mathfrak{V}+n\mathfrak{W})m + \mu\mathfrak{V} = 0, \\ (\Lambda+M)(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})n + M\mathcal{H} + (\lambda+\mu)(l\mathfrak{U}+m\mathfrak{V}+n\mathfrak{W})n + \mu\mathfrak{W} = 0. \end{cases}$$

Ces équations déterminent $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ lorsque l'on se donne $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ ou inversement.

On les résout élégamment de la manière suivante :

Multiplions-les respectivement par l, m, n et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons l'égalité

$$(54)\quad (\Lambda + 2M)(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{H}) + (\lambda + 2\mu)(l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W}) = 0$$

qui, reportée dans les égalités (146), donne

$$(55)\quad \begin{cases} \mathcal{F} = \left(\dfrac{\Lambda+M}{M}\,\dfrac{\lambda+2\mu}{\Lambda+2M} - \dfrac{\lambda+\mu}{M}\,l\right)(l\mathfrak{U}+m\mathfrak{V}+n\mathfrak{W}) - \dfrac{\mu}{M}\mathfrak{U}, \\ \mathcal{G} = \left(\dfrac{\Lambda+M}{M}\,\dfrac{\lambda+2\mu}{\Lambda+2M} - \dfrac{\lambda+\mu}{M}\,m\right)(l\mathfrak{U}+m\mathfrak{V}+n\mathfrak{W}) - \dfrac{\mu}{M}\mathfrak{V}, \\ \mathcal{H} = \left(\dfrac{\Lambda+M}{M}\,\dfrac{\lambda+2\mu}{\Lambda+2M} - \dfrac{\lambda+\mu}{M}\,n\right)(l\mathfrak{U}+m\mathfrak{V}+n\mathfrak{W}) - \dfrac{\mu}{M}\mathfrak{W}. \end{cases}$$

D'après ce que nous avons vu au commencement de ce paragraphe, la surface Σ, onde du second ordre pour ξ, η, ζ, sera onde du premier ordre pour la densité ρ. Si nous posons

$$(56)\quad \rho_2 - \rho_1 = R,$$

nous aurons, en tout point de l'onde Σ,

$$(57)\quad \frac{\partial R}{\partial a} = l\mathcal{R}, \qquad \frac{\partial R}{\partial b} = m\mathcal{R}, \qquad \frac{\partial R}{\partial c} = n\mathcal{R}.$$

L'égalité (22), jointe aux égalités (43), (51), (56) et (57), donne

$$(58)\quad \mathcal{R} = -\rho_0(l\mathcal{F} - m\mathcal{G} + n\mathcal{H})$$

ou bien, en vertu de l'égalité (54),

$$(59)\quad \mathcal{R} = \rho_0\,\frac{\lambda + 2\mu}{\Lambda + 2M}(l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W}).$$

La surface Σ est onde du troisième ordre par rapport à T; si l'on différentie successivement l'égalité (27 *bis*) par rapport à a, b, c, on en tire, en tout point de la surface Σ, les égalités

$$(60)\quad \begin{cases} \rho_0 \dfrac{\mathrm{T}}{\mathrm{E}} \dfrac{d\varphi(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}} \dfrac{\partial}{\partial a}\left(\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial a} + \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial b} + \dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial c}\right) \\ \quad - k(\mathrm{T}) \dfrac{\partial}{\partial a}\left[\dfrac{\partial^2(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1)}{\partial a^2} + \dfrac{\partial^2(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1)}{\partial b^2} + \dfrac{\partial^2(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1)}{\partial c^2}\right] = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Il existera d'ailleurs, en chaque point de la surface Σ, une grandeur ϖ telle que

$$(61)\qquad \frac{\partial^3(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1)}{\partial a^p\, \partial b^q\, \partial c^r} = l^p m^q n^r \varpi \qquad (p + q + r = 3).$$

Moyennant ces égalités et les égalités (48), les égalités (60) donneront sans peine

$$(62)\qquad \varpi = -\frac{\rho_0}{k(\mathrm{T})} \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{E}} \frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}} (l\Theta + m\Phi + n\Psi).$$

Ainsi, *au sein d'un milieu vitreux, affecté de viscosité, bon conducteur et peu écarté de l'état initial, il peut se produire des ondes du second ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse. Ces ondes séparent constamment les mêmes parties du milieu. Elles sont du premier ordre pour les quantités* N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z *et pour la densité* ρ; *elles sont, au contraire, du troisième ordre pour la température* T.

Par des méthodes semblables à celles qui ont été employées en la deuxième Partie de nos *Recherches sur l'Hydrodynamique*, ce théorème peut se généraliser et devenir le suivant :

Au sein d'un tel milieu, on peut observer des ondes d'ordre $\nu\,(\nu \geq 2)$ *par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse. Ces ondes séparent constamment les mêmes parties du milieu. Elles sont d'ordre* $(\nu - 1)$ *pour les quantités* N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z *et pour la densité* ρ; *elles sont, au contraire, d'ordre* $(\nu + 1)$ *pour la température* T.

II. — Des ondes du premier ordre en u, v, w, dans un milieu vitreux, très peu écarté de l'état initial, animé de mouvements très petits et bon conducteur de la chaleur.

La méthode que nous venons d'employer ne s'applique pas aux ondes qui seraient du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse. Dans ce cas, en effet, la condition qui permet, en la première Partie de ces *Recherches*, de passer de l'égalité (78) à l'égalité (79), n'est plus vérifiée aux divers points de l'onde; on ne peut donc plus écrire, en général, les équations (82) de la première Partie, ni, partant, les équations (20) de la seconde Partie.

Soient S la surface d'onde à l'instant t, dans l'espace de x, y, z, et α, β, γ les cosinus directeurs de la normale menée de la région 1 vers la région 2. Par un raisonnement semblable à celui que nous avons développé en nos *Recherches sur l'Hydrodynamique*, 1re série, 2e Partie, Chapitre III, § I, nous montrerons que *l'on doit avoir, en tout point de la surface* S *et à tout instant*,

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned}
&(N_{x2}-N_{x1})\alpha+(T_{z2}-T_{z1})\beta+(T_{y2}-T_{y1})\gamma\\
&\quad+(\nu_{x2}-\nu_{x1})\alpha+(\tau_{z2}-\tau_{z1})\beta+(\tau_{y2}-\tau_{y1})\gamma=0,\\
&(T_{z2}-T_{z1})\alpha+(N_{y2}-N_{y1})\beta+(T_{x2}-T_{x1})\gamma\\
&\quad+(\tau_{z2}-\tau_{z1})\alpha+(\nu_{y2}-\nu_{y1})\beta+(\tau_{x2}-\tau_{x1})\gamma=0,\\
&(T_{y2}-T_{y1})\alpha+(T_{x2}-T_{x1})\beta+(N_{z2}-N_{z1})\gamma\\
&\quad+(\tau_{y2}-\tau_{y1})\alpha+(\tau_{x2}-\tau_{x1})\beta+(\nu_{z2}-\nu_{z1})\gamma=0.
\end{aligned}\right.$$

Cette condition est générale. Au sein d'un milieu très peu écarté de l'état initial, elle peut être remplacée par la suivante :

On a, en tout point de la surface Σ *et à tout instant*,

$$(64)\quad \left\{\begin{aligned}
&(N_{x2}-N_{x1})l+(T_{z2}-T_{z1})m+(T_{y2}-T_{y1})n\\
&\quad+(\nu_{x2}-\nu_{x1})l+(\tau_{z2}-\tau_{z1})m+(\tau_{y2}-\tau_{y1})n=0,\\
&(T_{z2}-T_{z1})l+(N_{y2}-N_{y1})m+(T_{x2}-T_{x1})n\\
&\quad+(\tau_{z2}-\tau_{z1})l+(\nu_{y2}-\nu_{y1})m+(\tau_{x2}-\tau_{x1})n=0,\\
&(T_{y2}-T_{y1})l+(T_{x2}-T_{x1})m+(N_{z2}-N_{z1})n\\
&\quad+(\tau_{y2}-\tau_{y1})l+(\tau_{x2}-\tau_{x1})m+(\nu_{z2}-\nu_{z1})n=0.
\end{aligned}\right.$$

L'onde est du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse; dès lors, si l'on conserve les notations (47), il existera, en chaque point de la surface Σ, un vecteur $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ tel que

$$(65)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial a} = l\mathfrak{U}, & \dfrac{\partial U}{\partial b} = m\mathfrak{U}, & \dfrac{\partial U}{\partial c} = n\mathfrak{U}, \\ \dfrac{\partial V}{\partial a} = l\mathfrak{V}, & \dfrac{\partial V}{\partial b} = m\mathfrak{V}, & \dfrac{\partial V}{\partial c} = n\mathfrak{W}, \\ \dfrac{\partial W}{\partial a} = l\mathfrak{W}, & \dfrac{\partial W}{\partial b} = m\mathfrak{W}, & \dfrac{\partial W}{\partial c} = n\mathfrak{W}. \end{cases}$$

L'onde est, d'ailleurs, du second ordre par rapport à la température T; les égalités (19) et (65) donnent donc

$$(66)\quad \begin{cases} (\nu_{x2} - \nu_{x1})\, l + (\tau_{z2} - \tau_{z1})\, m + (\tau_{y2} - \tau_{y1})\, n \\ \qquad = -(\lambda + \mu)(l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W})\, l - \mu\mathfrak{U}, \\ (\tau_{z2} - \tau_{z1})\, l + (\nu_{y2} - \nu_{y1})\, m + (\tau_{x2} - \tau_{x1})\, n \\ \qquad = -(\lambda + \mu)(l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W})\, m - \mu\mathfrak{V}, \\ (\tau_{y2} - \tau_{y1})\, l + (\tau_{x2} - \tau_{x1})\, m + (\nu_{z2} - \nu_{z1})\, n \\ \qquad = -(\lambda + \mu)(l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W})\, n - \mu\mathfrak{W}. \end{cases}$$

Supposons, tout d'abord, que $\mathfrak{M}$ soit différent de o; l'onde du premier ordre par rapport à u, v, w sera du second ordre par rapport à ξ, η, ζ; selon les égalités (8), elle sera du premier ordre par rapport à N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z; les égalités (64) deviendront

$$(64\ bis)\quad \begin{cases} (\nu_{x2} - \nu_{x1})\, l + (\tau_{z2} - \tau_{z1})\, m + (\tau_{y2} - \tau_{y1})\, n = 0, \\ (\tau_{z2} - \tau_{z1})\, l + (\nu_{y2} - \nu_{y1})\, m + (\tau_{x2} - \tau_{x1})\, n = 0, \\ (\tau_{y2} - \tau_{y1})\, l + (\tau_{x2} - \tau_{x1})\, m + (\nu_{z2} - \nu_{z1})\, n = 0 \end{cases}$$

ou, selon les égalités (66),

$$(50)\quad \begin{cases} (\lambda + \mu)(l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W})\, l + \mu\mathfrak{U} = 0, \\ (\lambda + \mu)(l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W})\, m + \mu\mathfrak{V} = 0, \\ (\lambda + \mu)(l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W})\, n + \mu\mathfrak{W} = 0. \end{cases}$$

Nous avons vu que ces équations n'admettaient d'autre solution que

$$\mathfrak{U} = 0, \qquad \mathfrak{V} = 0, \qquad \mathfrak{W} = 0.$$

Donc, *au sein d'un milieu vitreux, doué de viscosité, très peu écarté de l'état initial, on ne peut observer aucune onde du premier ordre par rapport à la vitesse, qui se propage de manière à ne pas séparer constamment les mêmes portions du milieu.*

Supposons maintenant

$$\mathfrak{M} = 0.$$

L'onde du premier ordre par rapport à u, v, w serait aussi du premier ordre par rapport à ξ, η, ζ; dès lors, en gardant les notations (43), il existerait, en tout point de la surface Σ, un vecteur $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ tel que

$$(67)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a} = l\mathcal{F}, & \dfrac{\partial F}{\partial b} = m\mathcal{F}, & \dfrac{\partial F}{\partial c} = n\mathcal{F}, \\ \dfrac{\partial G}{\partial a} = l\mathcal{G}, & \dfrac{\partial G}{\partial b} = m\mathcal{G}, & \dfrac{\partial G}{\partial c} = n\mathcal{G}, \\ \dfrac{\partial H}{\partial a} = l\mathcal{H}, & \dfrac{\partial H}{\partial b} = m\mathcal{H}, & \dfrac{\partial H}{\partial c} = n\mathcal{H}. \end{cases}$$

Ces égalités, jointes aux égalités (8), donnent

$$(68)\quad \begin{cases} (N_{x2} - N_{x1})\,l + (T_{z2} - T_{z1})\,m + (T_{y2} - T_{y1})\,n \\ \qquad = -(\Lambda + M)(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{H})\,l - M\mathcal{F}, \\ (T_{z2} - T_{z1})\,l + (N_{y2} - N_{y1})\,m + (T_{x2} - T_{x1})\,n \\ \qquad = -(\Lambda + M)(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{H})\,m - M\mathcal{G}, \\ (T_{y2} - T_{y1})\,l + (T_{x2} - T_{x1})\,m + (N_{z2} - N_{z1})\,n \\ \qquad = -(\Lambda + M)(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{H})\,n - M\mathcal{H}. \end{cases}$$

En vertu des égalités (66) et (68), les égalités (64) deviennent

$$(53)\quad \begin{cases} (\Lambda + M)(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathfrak{M})\,l + M\mathcal{F} \\ \quad + (\lambda + \mu)(l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W})\,l + \mu\,\mathfrak{U} = 0, \\ (\Lambda + M)(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathfrak{M})\,m + M\mathcal{G} \\ \quad + (\lambda + \mu)(l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W})\,m + \mu\,\mathfrak{V} = 0, \\ (\Lambda + M)(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{H})\,n + M\mathfrak{M} \\ \quad + (\lambda + \mu)(l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W})\,n + \mu\,\mathfrak{W} = 0. \end{cases}$$

Comme nous l'avons vu, ces égalités entraînent les égalités (54) et (55).

L'égalité (22) nous donne, en chaque point de la surface Σ,

$$\rho_2 - \rho_1 = -\rho_0\left(\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial G}{\partial b} + \frac{\partial H}{\partial c}\right)$$

ou bien, en vertu des égalités (67),

$$\rho_2 - \rho_1 = -\rho_0(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{H})$$

ou enfin, en vertu de l'égalité (54),

$$\rho_2 - \rho_1 = \rho_0 \frac{\lambda + 2\mu}{\Lambda + 2M}(l\mathfrak{V} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W}). \tag{69}$$

La surface Σ est onde du second ordre pour la température T; il existe donc une grandeur $\mathfrak{T}$ telle que, sur la surface Σ,

$$\frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r} = l^p b^q n^r \mathfrak{T} \qquad (p + q + r = 2). \tag{70}$$

Moyennant les égalités (65) et (70), l'égalité (27 *bis*) donne

$$\mathfrak{T} = -\frac{\rho_0}{k(T)}\frac{T}{E}\frac{d\varphi_1(T)}{dT}(l\mathfrak{V} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W}). \tag{62}$$

Donc, *au sein d'un milieu vitreux, affecté de viscosité, bon conducteur de la chaleur et écarté de l'état initial, on peut observer une onde du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse. Une telle onde sépare toujours les mêmes portions du milieu. Elle est surface de discontinuité pour les quantités* N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z *et pour la densité* ρ; *au contraire, elle est onde du second ordre pour la température* T.

III. — Des ondes dans un milieu vitreux, dénué de viscosité, très peu écarté de l'état initial et animé de mouvements très petits.

Tout ce qui précède suppose essentiellement, comme nous l'avons indiqué, que le milieu est doué de viscosité; notre analyse devient illégitime si les coefficients λ et μ sont égaux à 0.

La propagation des ondes dans un milieu vitreux, peu écarté de l'état initial et doué de viscosité obéit à des lois bien connues depuis Poisson et Cauchy; les méthodes suivies pour établir ces lois supposent, en général, que la température est uniforme et que les actions exercées sur les divers éléments du milieu sont nulles; il importe de se débarrasser de ces restrictions; c'est ce que nous allons faire par l'analyse suivante :

Supposons que la surface Σ soit une onde du second ordre pour les fonctions ξ, η, ζ, partant, selon les égalités (8), du premier ordre pour les grandeurs $N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z$. Les quantités $\nu_x, \nu_y, \nu_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ étant nulles, les égalités (20) donneront, en tout point de l'onde,

$$(71)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial(N_{x2}-N_{x1})}{\partial a}+\frac{\partial(T_{z2}-T_{z1})}{\partial b}+\frac{\partial(T_{y2}-T_{y1})}{\partial c}+\rho_0\frac{\partial^2(\xi_2-\xi_1)}{\partial t^2}=0,\\ &\frac{\partial(T_{z2}-T_{z1})}{\partial a}+\frac{\partial(N_{y2}-N_{y1})}{\partial b}+\frac{\partial(T_{x2}-T_{x1})}{\partial c}+\rho_0\frac{\partial^2(\eta_2-\eta_1)}{\partial t^2}=0,\\ &\frac{\partial(T_{y2}-T_{y1})}{\partial a}+\frac{\partial(T_{x2}-T_{x1})}{\partial b}+\frac{\partial(N_{z2}-N_{z1})}{\partial c}+\rho_0\frac{\partial^2(\zeta_2-\zeta_1)}{\partial t^2}=0. \end{aligned}\right.$$

Conservons les notations (43). Il existera, en chaque point de la surface Σ, un vecteur $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ tel que

$$(72)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 F}{\partial a^p\partial b^q\partial c^r\partial t^s}=(-\mathfrak{N})^s l^p m^q n^r \mathcal{F},\\ &\frac{\partial^2 G}{\partial a^p\partial b^q\partial c^r\partial t^s}=(-\mathfrak{N})^s l^p m^q n^r \mathcal{G} \qquad (p+q+r+s=2),\\ &\frac{\partial^2 H}{\partial a^p\partial b^q\partial c^r\partial t^s}=(-\mathfrak{N})^s l^p m^q n^r \mathcal{H}. \end{aligned}\right.$$

Selon l'égalité (27), l'onde est au moins du second ordre par rapport à la température T; dès lors, les égalités (8) et (72) nous donnent les égalités (52); en vertu des égalités (52) et (72), les égalités (71) deviennent

$$(73)\quad \left\{\begin{aligned} &(\Lambda+M)(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})\,l+(M-\rho_0\mathfrak{N}^2)\mathcal{F}=0,\\ &(\Lambda+M)(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})\,m+(M-\rho_0\mathfrak{N}^2)\mathcal{G}=0,\\ &(\Lambda+M)(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})\,n+(M-\rho_0\mathfrak{N}^2)\mathcal{H}=0. \end{aligned}\right.$$

Multiplions respectivement ces égalités par l, m, n et ajoutons-les

Comme nous l'avons vu, ces égalités entraînent les égalités (54) et (55).

L'égalité (22) nous donne, en chaque point de la surface Σ,

$$\rho_2 - \rho_1 = -\rho_0\left(\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial G}{\partial b} + \frac{\partial H}{\partial c}\right)$$

ou bien, en vertu des égalités (67),

$$\rho_2 - \rho_1 = -\rho_0(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{H})$$

ou enfin, en vertu de l'égalité (54),

$$(69) \qquad \rho_2 - \rho_1 = \rho_0 \frac{\lambda + 2\mu}{\Lambda + 2M}(l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W}).$$

La surface Σ est onde du second ordre pour la température T; il existe donc une grandeur $\mathfrak{T}$ telle que, sur la surface Σ,

$$(70) \qquad \frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r} = l^p b^q n^r \mathfrak{T} \qquad (p + q + r = 2).$$

Moyennant les égalités (65) et (70), l'égalité (27 *bis*) donne

$$(62) \qquad \mathfrak{T} = -\frac{\rho_0}{k(T)}\frac{T}{E}\frac{d\varphi_1(T)}{dT}(l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W}).$$

Donc, *au sein d'un milieu vitreux, affecté de viscosité, bon conducteur de la chaleur et écarté de l'état initial, on peut observer une onde du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse. Une telle onde sépare toujours les mêmes portions du milieu. Elle est surface de discontinuité pour les quantités* N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z *et pour la densité* ρ; *au contraire, elle est onde du second ordre pour la température* T.

III. — Des ondes dans un milieu vitreux, dénué de viscosité, très peu écarté de l'état initial et animé de mouvements très petits.

Tout ce qui précède suppose essentiellement, comme nous l'avons indiqué, que le milieu est doué de viscosité; notre analyse devient illégitime si les coefficients λ et μ sont égaux à 0.

La propagation des ondes dans un milieu vitreux, peu écarté de l'état initial et doué de viscosité obéit à des lois bien connues depuis Poisson et Cauchy; les méthodes suivies pour établir ces lois supposent, en général, que la température est uniforme et que les actions exercées sur les divers éléments du milieu sont nulles; il importe de se débarrasser de ces restrictions; c'est ce que nous allons faire par l'analyse suivante :

Supposons que la surface Σ soit une onde du second ordre pour les fonctions ξ, η, ζ, partant, selon les égalités (8), du premier ordre pour les grandeurs N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z. Les quantités v_x, v_y, v_z, τ_x, τ_y, τ_z étant nulles, les égalités (20) donneront, en tout point de l'onde,

$$(71)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(N_{x2}-N_{x1})}{\partial a} + \dfrac{\partial(T_{z2}-T_{z1})}{\partial b} + \dfrac{\partial(T_{y2}-T_{y1})}{\partial c} + \rho_0 \dfrac{\partial^2(\xi_2-\xi_1)}{\partial t^2} = 0, \\ \dfrac{\partial(T_{z2}-T_{z1})}{\partial a} + \dfrac{\partial(N_{y2}-N_{y1})}{\partial b} + \dfrac{\partial(T_{x2}-T_{x1})}{\partial c} + \rho_0 \dfrac{\partial^2(\eta_2-\eta_1)}{\partial t^2} = 0, \\ \dfrac{\partial(T_{y2}-T_{y1})}{\partial a} + \dfrac{\partial(T_{x2}-T_{x1})}{\partial b} + \dfrac{\partial(N_{z2}-N_{z1})}{\partial c} + \rho_0 \dfrac{\partial^2(\zeta_2-\zeta_1)}{\partial t^2} = 0. \end{cases}$$

Conservons les notations (43). Il existera, en chaque point de la surface Σ, un vecteur $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ tel que

$$(72)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r \partial t^s} = (-\mathfrak{N})^s l^p m^q n^r \mathcal{F}, \\ \dfrac{\partial^2 G}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r \partial t^s} = (-\mathfrak{N})^s l^p m^q n^r \mathcal{G} \qquad (p+q+r+s=2), \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r \partial t^s} = (-\mathfrak{N})^s l^p m^q n^r \mathcal{H}. \end{cases}$$

Selon l'égalité (27), l'onde est au moins du second ordre par rapport à la température T; dès lors, les égalités (8) et (72) nous donnent les égalités (52); en vertu des égalités (52) et (72), les égalités (71) deviennent

$$(73)\quad \begin{cases} (\Lambda + M)(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{H})\, l + (M - \rho_0 \mathfrak{N}^2)\mathcal{F} = 0, \\ (\Lambda + M)(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{H})\, m + (M - \rho_0 \mathfrak{N}^2)\mathcal{G} = 0, \\ (\Lambda + M)(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{H})\, n + (M - \rho_0 \mathfrak{N}^2)\mathcal{H} = 0. \end{cases}$$

Multiplions respectivement ces égalités par l, m, n et ajoutons-les

membre à membre. Nous trouvons

$$(74)\qquad (\Lambda + 2M - \rho_0 \mathfrak{N}^2)(l\mathfrak{F} + m\mathfrak{G} + n\mathfrak{H}) = 0.$$

Si nous n'avons pas

$$(75)\qquad l\mathfrak{F} + m\mathfrak{G} + n\mathfrak{H} = 0,$$

nous devons avoir

$$(76)\qquad \mathfrak{N} = \sqrt{\frac{\Lambda + 2M}{\rho_0}}$$

et les égalités (73) donnent alors les relations

$$(77)\qquad \frac{\mathfrak{F}}{l} = \frac{\mathfrak{G}}{m} = \frac{\mathfrak{H}}{n}$$

qui expriment que l'onde propage une perturbation longitudinale.

Les égalités (56) et (57) peuvent être conservées ici; elles donnent encore l'égalité

$$\mathfrak{R} = -\rho_0(l\mathfrak{F} + m\mathfrak{G} + n\mathfrak{H}).$$

D'ailleurs, l'onde étant au moins du second ordre par rapport à la température, on peut écrire l'égalité (70) qui, jointe aux égalités (72), (76) et (27), donne

$$(78)\qquad \mathfrak{T} = \frac{\rho_0}{k(T)}\,\frac{T}{E}\,\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\sqrt{\frac{\Lambda + 2M}{\rho_0}}(l\mathfrak{F} + m\mathfrak{G} + n\mathfrak{H}).$$

Si nous avons

$$(75)\qquad l\mathfrak{F} + m\mathfrak{G} + n\mathfrak{H} = 0,$$

l'onde propage une perturbation transversale.

Les égalités (58) et (27), qui peuvent être conservées ici, donnent

$$(79)\qquad \mathfrak{R} = 0, \qquad \mathfrak{T} = 0,$$

et nous enseignent que l'onde est d'ordre supérieur au premier pour la densité ρ et au second pour la température T.

Enfin, les égalités (73) nous font connaître la valeur de la vitesse

de propagation

$$(80)\qquad \mathfrak{N} = \sqrt{\frac{\mathrm{M}}{\rho_0}}.$$

En résumé, *un milieu vitreux, bon conducteur, peu écarté de l'état initial et dénué de viscosité peut propager deux sortes d'ondes qui soient du second ordre par rapport aux composantes ξ, η, ζ du déplacement et du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse.*

Les premières, qui sont du premier ordre par rapport à la densité et du second ordre par rapport à la température, propagent une perturbation longitudinale avec la vitessse

$$\mathfrak{N} = \sqrt{\frac{\Lambda + 2\mathrm{M}}{\rho_0}}.$$

Les secondes, qui sont d'ordre supérieur au premier pour la densité et au second pour la température, propagent une perturbation transversale avec la vitesse

$$\mathfrak{N} = \sqrt{\frac{\mathrm{M}}{\rho_0}}.$$

Nous avons supposé que l'onde considérée était du second ordre en ξ, η, ζ; elle est alors au moins du premier ordre en u, v, w; mais il pourrait se faire qu'elle fût du premier ordre en u, v, w tout en étant aussi du premier ordre en ξ, η, ζ; pour cela, il suffirait que l'on eût

$$(45)\qquad \mathfrak{N} = 0.$$

L'onde serait alors surface de discontinuité pour ρ et pour les six quantités N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z. Une raison semblable à celle qui a fourni les égalités (64) exigerait que l'on eût, en tout point de l'onde,

$$\begin{aligned}
(N_{x2} - N_{x1})\,l + (T_{z2} - T_{z1})\,m + (T_{y2} - T_{y1})\,n &= 0,\\
(T_{z2} - T_{z1})\,l + (N_{y2} - N_{y1})\,m + (T_{x2} - T_{x1})\,n &= 0,\\
(T_{y2} - T_{y1})\,l + (T_{x2} - T_{x1})\,m + (N_{z2} - N_{z1})\,n &= 0.
\end{aligned}$$

En vertu des égalités (68), dont on peut reprendre ici les notations,

ces égalités peuvent s'écrire

$$(\Lambda+M)(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})l+M\mathcal{F}=0,$$
$$(\Lambda+M)(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})m+M\mathcal{G}=0,$$
$$(\Lambda+M)(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})n+M\mathcal{H}=0.$$

Multiplions respectivement ces égalités par l, m, n et ajoutons-les membre à membre, en tenant compte de la dernière inégalité (34); nous trouvons

$$l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H}=0.$$

Si l'on reporte ce résultat dans les égalités précédentes, en tenant compte de la seconde inégalité (34), on trouve

$$\mathcal{F}=0, \qquad \mathcal{G}=0, \qquad \mathcal{H}=0.$$

L'onde considérée ne saurait donc exister.

IV. — Des ondes dans un milieu vitreux, très peu écarté de l'état initial, animé de mouvements très petits et mauvais conducteur de la chaleur.

Tout ce qui précède suppose l'emploi de l'équation (27 *bis*) où l'on admet que $k(T)$ a une valeur positive. Si l'on suppose

(81) $$k(T)=0,$$

cas auquel *le milieu est mauvais conducteur de la chaleur*, l'équation (27 *bis*) se réduit à

(82) $$c\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{T}{E}\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\left(\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{\partial v}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial c}\right)=0,$$

et l'analyse précédente tombe en défaut. Nous allons examiner les modifications qu'il convient d'y apporter en vertu de l'égalité (81).

Considérons d'abord le cas d'une surface Σ, onde du *premier ordre* par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse; les égalités (47) et (65), que l'on peut conserver dans ce cas, montrent que l'on a, en tout point de la surface Σ,

(83) $$\frac{\partial U}{\partial a}+\frac{\partial V}{\partial b}+\frac{\partial W}{\partial c}=l\mathfrak{U}+m\mathfrak{V}+n\mathfrak{W}.$$

La surface Σ peut-elle être, pour la température T, onde du premier ordre ou d'ordre supérieur au premier? Dans ce cas, il doit exister, en tout point de la surface Σ, une grandeur ϖ, finie si l'onde est du premier ordre, nulle si elle est d'ordre supérieur au premier, telle que l'on ait

$$(84) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial(T_2-T_1)}{\partial a} = l\varpi, \qquad \dfrac{\partial(T_2-T_1)}{\partial b} = m\varpi, \qquad \dfrac{\partial(T_2-T_1)}{\partial c} = n\varpi, \\ \dfrac{\partial(T_2-T_1)}{\partial t} = -\mathfrak{N}\varpi. \end{array} \right.$$

En vertu des égalités (47), (83) et (84), l'égalité (82) donne, en tout point de la surface Σ,

$$(85) \qquad \mathfrak{N}\varpi = -\frac{T}{Ec}\frac{d\varphi_1(T)}{dT}(l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W}).$$

Cette égalité donne pour ϖ une valeur acceptable si $\mathfrak{N}$ est différent de o; elle est encore vérifiée si $\mathfrak{N}$ et $(l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W})$ s'annulent en même temps; mais elle devient absurde si l'on a $\mathfrak{N} = 0$ sans que $(l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W})$ s'annule en même temps.

Donc, *on peut admettre, en général, qu'une onde du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse est aussi onde au moins du premier ordre par rapport à la température* T; *mais, dans le cas particulier où l'on aurait*

$$(45) \qquad \mathfrak{N} = 0$$

sans avoir en même temps

$$(86) \qquad l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W} = 0,$$

la surface considérée serait surface de discontinuité pour la température.

Supposons maintenant que la surface Σ soit onde du *second ordre* par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse, et demandons-nous si elle peut être onde du premier ordre par rapport à la température T.

L'onde étant du second ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse, la quantité

$$\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial c}$$

varie d'une manière continue lorsqu'on la traverse. Dès lors, les égalités (82) et (84) donnent, en tout point de l'onde Σ,

$$\mathfrak{M}\mathfrak{T} = 0.$$

Si $\mathfrak{M}$ est différent de o, $\mathfrak{T}$ est nul et l'onde est, par rapport à la température, d'ordre supérieur au premier.

Donc, *une onde du second ordre par rapport aux composantes* u, v, w *de la vitesse est, en général, au moins du second ordre par rapport à la température* T; *toutefois, si l'on a*

$$\mathfrak{M} = 0, \tag{45}$$

l'onde peut n'être que du premier ordre par rapport à la température.

Ces lemmes démontrés, proposons-nous de répondre à la question suivante :

Un milieu vitreux, doué de viscosité, très peu écarté de l'état initial, animé de mouvements très petits et mauvais conducteur de la chaleur peut-il présenter une onde persistante pour laquelle $\mathfrak{M}$ *diffère de* o?

Examinons d'abord le cas où l'onde serait du *premier ordre* par rapport à u, v, w; elle serait au moins du premier ordre par rapport à T; dès lors, les quantités N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z varieraient d'une manière continue au passage de cette onde, ce qui permettrait de conserver les équations (64 *bis*); les égalités (63) demeureraient exactes et transformeraient les relations (64 *bis*) aux relations (50) qui entraînent la non-existence de l'onde considérée.

Examinons maintenant le cas où l'onde serait du *second ordre* par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse. Elle serait au moins du second ordre par rapport à la température T. Elle resterait donc onde du second ordre par rapport à

$$N_x, \quad N_y, \quad N_z, \quad T_x, \quad T_y, \quad T_z,$$

ce qui permettrait d'écrire encore, en tout point de la surface Σ, les relations (20 *bis*); les égalités (49) y resteraient également vraies, en

sorte qu'on retrouverait les relations (50) entrainant l'impossibilité de l'onde étudiée.

Le résultat, démontré pour les ondes du second ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse, s'étendrait sans peine aux ondes d'ordre plus élevé, ce qui nous permettrait d'énoncer la proposition suivante :

Il est impossible qu'une onde d'ordre $\nu\ (\nu \geqq 1)$ *par rapport aux composantes* u, v, w *de la vitesse persiste au sein d'un milieu vitreux, doué de viscosité, mauvais conducteur de la chaleur, très peu écarté de l'état initial et animé de mouvements très petits, si cette onde ne sépare pas constamment les deux mêmes parties du milieu.*

Examinons maintenant s'il peut, en un semblable milieu, se produire des ondes, du *premier ordre* par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse, pour lesquelles on ait

$$\mathcal{N} = 0. \tag{45}$$

En tout point d'une telle onde, on continuera d'écrire les équations (64).

L'onde peut être surface de discontinuité pour la température T, en sorte que $(T_2 - T_1)$ ne s'annule pas sur la surface Σ; mais on suppose que le milieu est, à chaque instant, très peu écarté de l'état initial; T_1, T_2 diffèrent donc très peu de la température initiale et $(T_2 - T_1)$ est une quantité très petite du même ordre que les écarts ξ, η, ζ.

Les égalités (67) et (68) ne donnent plus alors les égalités (68); mais, si l'on néglige les infiniment petits du second ordre, on est simplement conduit à ajouter aux seconds membres des égalités (68) les termes

$$-\rho_0 \frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}(T_2 - T_1)l, \quad -\rho_0 \frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}(T_2 - T_1)m, \quad -\rho_0 \frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}(T_2 - T_1)n,$$

T ayant une valeur comprise entre T_1 et T_2.

Si l'on néglige les infiniment petits du second ordre, les égalités (66) demeurent inaltérées. On a donc, en tout point de la sur-

face Σ, au lieu des égalités (53), les égalités

$$(87)\quad \left\{\begin{aligned} &(\Lambda + \mathrm{M})(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{H})n + \mathrm{M}\mathcal{F} + \rho_0 \frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_2)l \\ &+ (\lambda + \mu)(l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W})l + \mu\mathfrak{U} = 0, \\ &(\Lambda + \mathrm{M})(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{H})m + \mathrm{M}\mathcal{G} + \rho_0 \frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1)m \\ &+ (\lambda + \mu)(l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W})m + \mu\mathfrak{V} = 0, \\ &(\Lambda + \mathrm{M})(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{H})n + \mathrm{M}\mathcal{H} + \rho_0 \frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1)n \\ &+ (\lambda + \mu)(l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W})n + \mu\mathfrak{W} = 0, \end{aligned}\right.$$

auxquelles les égalités (22) et (67) joignent l'égalité

$$(88)\qquad \rho_2 - \rho_1 = -\rho_0(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{H}).$$

Multiplions les égalités (87) par l, m, n et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons

$$(89)\quad \begin{aligned} &(\Lambda + 2\mathrm{M})(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{H}) \\ &\quad + (\lambda + 2\mu)(l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W}) + \rho_0 \frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1) = 0. \end{aligned}$$

Cette relation (89) transforme l'égalité (88) en

$$(90)\quad \rho_2 - \rho_1 = \rho_0 \frac{\lambda + 2\mu}{\Lambda + 2\mathrm{M}}(l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W}) + \frac{\rho_0^2}{\Lambda + 2\mathrm{M}} \frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1).$$

En même temps, elle permet de résoudre les égalités (87) par rapport à $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ sous la forme

$$(91)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{F} = {}& \left[\frac{(\Lambda + \mathrm{M})(\lambda + 2\mu)}{\mathrm{M}(\Lambda + 2\mathrm{M})} - \frac{\lambda + \mu}{\mathrm{M}}\right](l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W})l - \frac{\mu}{\mathrm{M}}\mathfrak{U} \\ &+ \left[\frac{\Lambda + \mathrm{M}}{\mathrm{M}(\Lambda + 2\mathrm{M})} - \frac{1}{\mathrm{M}}\right]\rho_0 \frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1)l, \\ \mathcal{G} = {}& \left[\frac{(\Lambda + \mathrm{M})(\lambda + 2\mu)}{\mathrm{M}(\Lambda + 2\mathrm{M})} - \frac{\lambda + \mu}{\mathrm{M}}\right](l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W})m - \frac{\mu}{\mathrm{M}}\mathfrak{V} \\ &+ \left[\frac{\Lambda + \mathrm{M}}{\mathrm{M}(\Lambda + 2\mathrm{M})} - \frac{1}{\mathrm{M}}\right]\rho_0 \frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1)m, \\ \mathcal{H} = {}& \left[\frac{(\Lambda + \mathrm{M})(\lambda + 2\mu)}{\mathrm{M}(\Lambda + 2\mathrm{M})} - \frac{\lambda + \mu}{\mathrm{M}}\right](l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W})n - \frac{\mu}{\mathrm{M}}\mathfrak{W} \\ &+ \left[\frac{\Lambda + \mathrm{M}}{\mathrm{M}(\Lambda + 2\mathrm{M})} - \frac{1}{\mathrm{M}}\right]\rho_0 \frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1)n. \end{aligned}\right.$$

Les égalités (90) et (91) font connaître, en chaque point de l'onde, les valeurs de

$$\mathcal{I},\quad \mathcal{G},\quad \mathcal{H},\quad \rho_2-\rho_1$$

lorsqu'on connaît les valeurs de

$$\mathfrak{U},\quad \mathfrak{V},\quad \mathfrak{W},\quad T_2-T_1.$$

Ainsi, *au sein d'un milieu vitreux, mauvais conducteur de la chaleur, doué de viscosité, très peu écarté de l'état initial et animé de mouvements très petits, il peut se produire une onde persistante, du premier ordre par rapport aux vitesses. Une telle onde sépare constamment les deux mêmes portions du milieu. Elle est surface de discontinuité pour les quantités* N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z, *pour la densité* ρ *et pour la température* T.

Peut-il exister une onde, du *second ordre* par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse, et pour laquelle on ait

$$\mathfrak{M}=0\,?$$

En chaque point d'une telle onde, on devra avoir

$$(92)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial(N_{x2}+\nu_{x2}-N_{x1}-\nu_{x1})}{\partial a}+\frac{\partial(T_{z2}+\tau_{z2}-T_{z1}-\tau_{z1})}{\partial b}+\frac{\partial(T_{y2}+\tau_{y2}-T_{y1}-\tau_{y1})}{\partial c}=0,\\
&\frac{\partial(T_{z2}+\tau_{z2}-T_{z1}-\tau_{z1})}{\partial a}+\frac{\partial(N_{y2}+\nu_{y2}-N_{y1}-\nu_{y1})}{\partial b}+\frac{\partial(T_{x2}+\tau_{x2}-T_{x1}-\tau_{x1})}{\partial c}=0,\\
&\frac{\partial(T_{y2}+\tau_{y2}-T_{y1}-\tau_{y1})}{\partial a}+\frac{\partial(T_{x2}+\tau_{x2}-T_{x1}-\tau_{x1})}{\partial b}+\frac{\partial(N_{z2}+\nu_{z2}-N_{z1}-\nu_{z1})}{\partial c}=0.
\end{aligned}\right.$$

L'onde considérée peut être du premier ordre par rapport à ϖ, en sorte que, dans les égalités (84), ϖ peut être différent de o; mais c'est une quantité très petite comme ξ, η, ζ; les égalités (52) ne sont donc plus exactes; mais, si l'on néglige les infiniment petits du second ordre, elles doivent être remplacées par les égalités

$$(93)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial(N_{x2}-N_{x1})}{\partial a}+\frac{\partial(T_{z2}+T_{z1})}{\partial b}+\frac{\partial(T_{y2}-T_{y1})}{\partial c}\\
&\quad=-(\Lambda+M)(l\mathcal{I}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})\,l-M\mathcal{I}-\rho_0\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\varpi l,
\end{aligned}\right.$$

$$
(93)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial(\mathrm{T}_{z2}-\mathrm{T}_{z1})}{\partial a}+\frac{\partial(\mathrm{N}_{y2}-\mathrm{N}_{y1})}{\partial b}+\frac{\partial(\mathrm{T}_{x2}-\mathrm{T}_{x1})}{\partial c}\\
&\quad=-(\Lambda+\mathrm{M})(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})\,m-\mathrm{M}\mathcal{G}-\rho_0\frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\mathfrak{T}m,\\
&\frac{\partial(\mathrm{T}_{y2}-\mathrm{T}_{y1})}{\partial a}+\frac{\partial(\mathrm{T}_{x2}-\mathrm{T}_{x1})}{\partial b}+\frac{\partial(\mathrm{N}_{z2}-\mathrm{N}_{z1})}{\partial c}\\
&\quad=-(\Lambda+\mathrm{M})(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})\,n-\mathrm{M}\mathcal{H}-\rho_0\frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\mathfrak{T}n.
\end{aligned}
\right.
$$

Quant aux égalités (49), elles demeurent valables.

Dès lors, les égalités (49), (92) et (93) donnent les relations

$$
(94)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&(\Lambda+\mathrm{M})(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})\,l+\mathrm{M}\mathcal{F}+\rho_0\frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\mathfrak{T}l\\
&+(\lambda+\mu)(l\mathfrak{U}+m\mathfrak{V}+n\mathfrak{W})\,l+\mu\mathfrak{U}=0,\\
&(\Lambda+\mathrm{M})(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})\,m+\mathrm{M}\mathcal{G}+\rho_0\frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\mathfrak{T}m\\
&+(\lambda+\mathrm{M})(l\mathfrak{U}+m\mathfrak{V}+n\mathfrak{W})\,m+\mu\mathfrak{V}=0,\\
&(\Lambda+\mathrm{M})(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})\,n+\mathrm{M}\mathcal{H}+\rho_0\frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\mathfrak{T}n\\
&+(\lambda+\mu)(l\mathfrak{U}+m\mathfrak{V}+n\mathfrak{W})\,n+\mu\mathfrak{W}=0.
\end{aligned}
\right.
$$

A ces relations, il faut joindre la relation

$$
(58)\qquad \mathfrak{R}=-\rho_0(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H}).
$$

Si nous multiplions respectivement les égalités (94) par l, m, n et si nous ajoutons membre à membre les résultats obtenus, nous trouvons l'égalité

$$
(95)\qquad
\begin{aligned}
&(\Lambda+2\mathrm{M})(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})\\
&\quad+\rho_0\frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\mathfrak{T}+(\lambda+2\mu)(l\mathfrak{U}+m\mathfrak{V}+n\mathfrak{W})=0.
\end{aligned}
$$

En vertu de l'égalité (95), la relation (58) devient

$$
(96)\qquad \mathfrak{R}=\rho_0\frac{\lambda+2\mu}{\Lambda+2\mathrm{M}}(l\mathfrak{U}+m\mathfrak{V}+n\mathfrak{W})+\frac{\rho_0^2}{\Lambda+2\mathrm{M}}\frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\mathfrak{T}.
$$

En outre, les égalités (94) deviennent

$$(97)\left\{\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \left[\frac{(\Lambda+M)(\lambda+2\mu)}{M(\Lambda+2M)} - \frac{\lambda+\mu}{M}\right](l\mathfrak{V}+m\mathfrak{V}'+n\mathfrak{W})l - \frac{\mu}{M}\mathfrak{V} \\
&\quad + \left[\frac{\Lambda+M}{M(\Lambda+2M)} - \frac{1}{M}\right]\rho_0\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\mathfrak{T}l, \\
\mathcal{G} &= \left[\frac{(\Lambda+M)(\lambda+2\mu)}{M(\Lambda+2M)} - \frac{\lambda+\mu}{M}\right](l\mathfrak{V}+m\mathfrak{V}'+n\mathfrak{W})m - \frac{\mu}{M}\mathfrak{V}' \\
&\quad + \left[\frac{\Lambda+M}{M(\Lambda+2M)} - \frac{1}{M}\right]\rho_0\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\mathfrak{T}m, \\
\mathcal{H} &= \left[\frac{(\Lambda+M)(\lambda+2\mu)}{M(\Lambda+2M)} - \frac{\lambda+\mu}{M}\right](l\mathfrak{V}+m\mathfrak{V}'+n\mathfrak{W})n - \frac{\mu}{M}\mathfrak{W} \\
&\quad + \left[\frac{\Lambda+M}{M(\Lambda+2M)} - \frac{1}{M}\right]\rho_0\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\mathfrak{T}n.
\end{aligned}\right.$$

Les égalités (96) et (97) déterminent, en chaque point de l'onde, les valeurs de $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\mathfrak{K}$ lorsqu'on connait les valeurs de $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{V}'$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{T}$.

Ce que nous venons de dire touchant une onde du deuxième ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse s'étend sans peine aux ondes d'ordre plus élevé. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Au sein d'un milieu vitreux, affecté de viscosité, mauvais conducteur de la chaleur, très peu écarté de l'état initial et animé de mouvements très petits, on peut observer des ondes persistantes d'ordre ν $(\nu \geqq 2)$ *par rapport aux composantes* u, v, w *de la vitesse. Une telle onde sépare sans cesse les deux mêmes portions du milieu. Elle est d'ordre* $(\nu - 1)$ *pour les quantités* N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z, *la densité* ρ *et la température* T.

Il nous reste à étudier la propagation des ondes au sein du milieu supposé mauvais conducteur et dénué de viscosité,

Considérons une onde du second ordre en ξ, η, ζ et, partant, du premier ordre en u, v, w.

Selon l'égalité (85), où nous supposons $\mathfrak{N}$ différent de o, l'onde sera du premier ordre par rapport à la température; d'ailleurs, en vertu des égalités (72), l'égalité (85) devient

$$(98)\qquad \mathfrak{T} = \frac{T}{Ec}\frac{d\varphi_1(T)}{dT}(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{H}).$$

Les égalités (93) demeurent exactes, mais elles deviennent, en vertu de l'égalité (98),

$$(99)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial(N_{x2}-N_{x1})}{\partial a}+\frac{\partial(T_{z2}-T_{z1})}{\partial b}+\frac{\partial(T_{y2}-T_{y1})}{\partial c}\\
&\quad=-\left\{\Lambda+\frac{\rho_0 T}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2+M\right\}(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})l-M\mathcal{F},\\
&\frac{\partial(T_{z2}-T_{z1})}{\partial a}+\frac{\partial(N_{y2}-N_{y1})}{\partial b}+\frac{\partial(T_{x2}-T_{x1})}{\partial c}\\
&\quad=-\left\{\Lambda+\frac{\rho_0 T}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2+M\right\}(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})m-M\mathcal{G},\\
&\frac{\partial(T_{y2}-T_{y1})}{\partial a}+\frac{\partial(T_{x2}-T_{x1})}{\partial b}+\frac{\partial(N_{z2}-N_{z1})}{\partial c}\\
&\quad=-\left\{\Lambda+\frac{\rho_0 T}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2+M\right\}(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})n-M\mathcal{H}.
\end{aligned}\right.$$

En vertu de ces égalités et des égalités (72), les égalités (71) deviennent

$$(100)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left\{\Lambda+\frac{\rho_0 T}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{aT}\right]^2+M\right\}(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})l+(M-\rho_0\mathfrak{V}^2)\mathcal{F}=0,\\
&\left\{\Lambda+\frac{\rho_0 T}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2+M\right\}(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})m+(M-\rho_0\mathfrak{V}^2)\mathcal{G}=0,\\
&\left\{\Lambda+\frac{\rho_0 T}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2+M\right\}(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})n+(M-\rho_0\mathfrak{V}^2)\mathcal{H}=0.
\end{aligned}\right.$$

Ces égalités (100) ne diffèrent des égalités (73) que par la substitution de $\Lambda+\frac{\rho_0 T}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2$ à Λ; donc les conclusions que nous en tirerons différeront seulement par cette substitution de celles que nous avons développées à la fin du paragraphe précédent.

Un milieu vitreux, dénué de viscosité, mauvais conducteur, très peu écarté de l'état initial et animé de mouvements très petits peut propager deux sortes d'ondes qui sont du second ordre par rapport aux composantes ξ, η, ζ du déplacement et du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse.

Les premières, qui sont du premier ordre pour la densité et la tempéra-

ture, propagent une perturbation longitudinale avec une vitesse

$$\mathfrak{N} = \sqrt{\frac{\Lambda + \frac{\rho_0 T}{E c}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2 + 2M}{\rho_0}}. \tag{101}$$

Les secondes, qui sont d'ordre supérieur au premier pour la densité et la température, propagent une perturbation transversale avec la vitesse

$$\mathfrak{N} = \sqrt{\frac{M}{\rho_0}}. \tag{80}$$

TROISIÈME PARTIE.

LA STABILITÉ DES MILIEUX ÉLASTIQUES.

CHAPITRE I.

DES CONDITIONS SUFFISANTES POUR LA STABILITÉ INITIALE D'UN MILIEU ÉLASTIQUE.

I. — Sur les conditions suffisantes pour la stabilité initiale d'un milieu quelconque.

L'état initial du milieu que nous nous proposons d'étudier est un état où ce milieu, soumis uniquement à une pression extérieure normale et uniforme Π_0, et porté en tous ses points à une même température T_0, se trouve en équilibre; il est alors homogène et sa densité est ρ_0. S'il est, en outre, isotrope, nous avons affaire à un milieu *vitreux;* sinon, nous avons affaire à un milieu *cristallisé*.

Supposons que ce milieu ait subi, par rapport à l'état initial que nous venons de définir, une très petite déformation; le point matériel qui, dans l'état initial, avait pour coordonnées a, b, c, a maintenant pour coordonnées $a+\xi$, $b+\eta$, $c+\zeta$, ξ, η, ζ étant des quantités infiniment petites. La déformation en chaque point est définie par les six grandeurs

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\varepsilon_1 = \frac{\partial\xi}{\partial a}, && \varepsilon_2 = \frac{\partial\eta}{\partial b}, && \varepsilon_3 = \frac{\partial\zeta}{\partial c}, \\ &\gamma_1 = \frac{\partial\eta}{\partial c} + \frac{\partial\zeta}{\partial b}, && \gamma_2 = \frac{\partial\zeta}{\partial a} + \frac{\partial\xi}{\partial c}, && \gamma_3 = \frac{\partial\xi}{\partial b} + \frac{\partial\eta}{\partial a}. \end{aligned}\right.$$

Supposons, en même temps, que la température T aux divers points du milieu diffère très peu de T_0.

Le milieu admettra un potentiel interne $\mathfrak{F}$ qui pourra s'écrire

$$(2)\qquad \begin{aligned}\mathfrak{F} &= \int \Phi(T, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\, dm \\ &= \int\int\int \rho_0 \Phi(T, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\, da\, db\, dc.\end{aligned}$$

Nous devrons, d'ailleurs, dans le développement de la fonction Φ, nous arrêter aux quantités infiniment petites du second ordre par rapport à $(T - T_0)$ et à $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Les égalités (45), (61) et (62) de la première Partie de nos *Recherches sur l'Élasticité* donnent, en tout point du milieu,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} N_x &= -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1}, & N_y &= -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2}, & N_z &= -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1}, \\ T_x &= -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_1}, & T_y &= -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_2}, & T_z &= -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_3}. \end{aligned}\right.$$

Cherchons quelle est la pression Π qui, à la température T, maintiendrait le milieu en équilibre sous la densité ρ_0, et désignons par $-\rho_0 \varphi_1(\rho_0, T)$ cette pression. Nous devrions avoir, pour

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 &= 0, \\ \varphi_1(\rho_0, T) = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_3}, \\ 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_2} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_3}. \end{aligned}$$

Nous voyons alors que Φ peut s'écrire

$$(4)\quad \Phi = \varphi_0(\rho_0, T) + \varphi_1(\rho_0, T)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \varphi_2(\rho_0, T_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3),$$

φ_2 étant une forme quadratique en $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Si le milieu est limité par une surface dont les divers points sont immobiles et si ses diverses masses élémentaires sont soustraites à l'action de toute force extérieure, le système admet un potentiel total qui se confond avec le potentiel interne (2). Si, au contraire, la surface qui limite le milieu est totalement ou partiellement déformable,

et si la partie déformable de cette surface est soumise à la pression normale, uniforme et constante Π_0, le potentiel total s'obtiendra en ajoutant au potentiel interne $\mathcal{F}$, donné par l'égalité (2), le produit $\Pi_0 V$ de la pression Π_0 par le volume total V du système.

Supposons, en particulier, que la température du milieu soit maintenue constamment égale à la température initiale T_0. Si la surface limite est maintenue immobile, le potentiel total a pour valeur, selon les égalités (2) et (4),

$$(5)\quad \Omega = \int\int\int \rho_0[\varphi_0(\rho_0, T_0) + \varphi_1(\rho_0, T_0)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \varphi_2(\rho_0, T_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)]\, da\, db\, dc.$$

Si la surface limite est totalement ou partiellement déformable et si la portion déformable supporte la pression normale, uniforme et constante Π_0, le potentiel total a pour expression

$$(6)\quad \Omega = \Pi_0 V + \int\int\int \rho_0[\varphi_0(\rho_0, T_0) + \varphi_1(\rho_0, T_0)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \varphi_2(\rho_0, T_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)]\, da\, db\, dc.$$

La pression Π_0 est, d'ailleurs, liée à la densité ρ_0 et à la température T_0 par la relation

$$(7)\qquad \Pi_0 = -\rho_0\varphi_1(\rho_0, T_0).$$

L'étude de l'élasticité se limite à celle des milieux doués des propriétés que nous allons définir :

Si l'on maintient invariable la température initiale du système; si l'on maintient immobile toute la surface qui limite le milieu ou seulement une partie de cette surface; si enfin, la partie déformable de cette surface, lorsqu'elle existe, supporte une pression normale et uniforme constamment égale à la pression initiale;

L'état initial du milieu est toujours un état d'équilibre stable.

La recherche des conditions qui sont nécessaires et suffisantes pour qu'une telle stabilité soit assurée se présente comme un des problèmes essentiels en la théorie de l'élasticité. Elle définit avec précision les propriétés physiques des milieux qui sont l'objet de cette théorie.

Le criterium bien connu de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet nous indique dans quelle voie se peuvent découvrir les *conditions suffisantes :*

Pour que la stabilité requise soit assurée, il suffit que l'état initial fasse prendre au potentiel total une valeur minimum parmi toutes celles qui sont compatibles avec les restrictions prescrites.

On voit alors qu'il est nécessaire, en premier lieu, de donner les relations qui expriment ces restrictions.

Ces relations sont bien aisées à écrire en tout point de la surface limite que l'on suppose immobile ; elles se réduisent à

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0. \tag{8}$$

Le problème de minimum ainsi posé présente des difficultés qui paraissent insurmontables.

Il existe toutefois un cas particulier où la solution de ce problème devient très aisée; c'est celui où *l'état initial du milieu est l'état d'équilibre pris, à la température* T_0, *sous une pression* Π_0 *égale à* o. Un tel état d'équilibre est concevable pour les solides et les liquides; il ne l'est point pour les gaz, qui sont ainsi exclus de notre étude; mais cette exclusion n'offre aucun inconvénient, car, pour les fluides, le problème qui nous occupe a été résolu d'une manière complète.

La fonction qui doit être minimum dans l'état initial, moyennant les conditions prescrites, est alors la fonction Ω donnée par l'égalité (5).

Pour que cette fonction soit minimum dans un état initial où le système est soumis à une pression nulle, il faut et il suffit que la forme quadratique

$$\varphi_2(\rho_0, T_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

en

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3, \quad \gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \gamma_3$$

soit une forme définie positive, toutes les fois que ρ_0, T_0 *vérifient la relation*

$$\varphi_1(\rho_0, T_0) = 0. \tag{9}$$

Comme la suffisance de cette condition est évidente, nous allons prouver seulement qu'elle est nécessaire.

Les égalités (5) et (9) permettent d'écrire

$$(10)\qquad \Omega = \iiint \rho_0 \varphi_0(\rho_0, T_0)\, da\, db\, dc + \iiint \rho_0 \varphi_2(\rho_0, T_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\, da\, db\, dc.$$

Au second membre, le premier terme demeure invariable en tout déplacement virtuel imposé au système ; le second, nul en l'état initial, doit être positif en tout autre état voisin.

A partir de l'état initial, nous pouvons donner au milieu un déplacement infiniment petit défini par les formules

$$(11)\qquad \begin{cases} \xi = a_{11} a + a_{12} b + a_{13} c, \\ \eta = a_{21} a + a_{22} b + a_{23} c, \\ \zeta = a_{31} a + a_{32} b + a_{33} c, \end{cases}$$

où les a_{ij} sont neuf constantes arbitraires. Nous aurons alors

$$(12)\qquad \begin{cases} \varepsilon_1 = a_{11}, & \varepsilon_2 = a_{22}, & \varepsilon_3 = a_{33}, \\ \gamma_1 = a_{32} + a_{23}, & \gamma_2 = a_{13} + a_{31}, & \gamma_3 = a_{21} + a_{12} \end{cases}$$

et il est clair que l'on peut disposer des neuf arbitraires a_{ij} de telle sorte que les six quantités ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 prennent des valeurs, indépendantes de a, b, c, choisies comme l'on voudra. Si nous désignons alors par

$$M = \iiint \rho_0\, da\, db\, dc$$

la masse totale du milieu considéré, au second membre de l'égalité (10), le second terme deviendra

$$M \varphi_2(\rho_0, T_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3).$$

Pour que ce terme soit positif en tout état voisin de l'état initial, il faut et il suffit que l'inégalité

$$(13)\qquad \varphi_2(\rho_0, T_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) > 0$$

soit vérifiée pour tout ensemble de valeurs non nulles de

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3, \quad \gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \gamma_3$$

et pour tout couple de valeurs de ρ_0, T_0 qui vérifie l'égalité (9).

En vertu du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes, l'inégalité (13) peut encore s'écrire, en tenant compte de l'égalité (4),

$$(14) \qquad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}\varepsilon_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}\varepsilon_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}\gamma_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2}\gamma_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3}\gamma_3\right)^{(2)} > 0.$$

Dans cette inégalité (14), (2) représente un *carré symbolique* où l'on doit faire

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}\right)^{(2)} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1^2}, \qquad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}\right) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial\varepsilon_2}, \qquad \ldots,$$

tandis que

$$\varepsilon_1^{(2)} = \varepsilon_1^2, \qquad (\varepsilon_1\varepsilon_2) = \varepsilon_1\varepsilon_2, \qquad \ldots.$$

L'inégalité (13), ou l'inégalité (14), écrite pour tout couple de valeurs de ρ_0, T_0 qui vérifie l'égalité (9), nous assure que l'état initial du système est stable dans les conditions prescrites, si cet état initial est l'état d'équilibre que prend le milieu porté à la température T_0 et *soumis à une pression nulle.*

Supposons maintenant *que l'inégalité* (13), *ou l'inégalité* (14), *soit vraie pour tout couple de valeurs de* ρ_0, T_0. Pourrons-nous affirmer que, l'état initial du milieu étant l'état d'équilibre pris à une température quelconque T_0 et *sous une pression quelconque* Π_0, cet état demeure stable dans les conditions prescrites ?

Nous pourrons affirmer que la quantité Ω donnée par l'égalité (5) est minimum dans l'état initial.

L'état initial sera donc sûrement un état d'équilibre stable si l'on maintient invariable la température et immobile la surface qui limite le milieu.

Mais il ne paraît pas que nous puissions rien affirmer touchant la quantité Ω donnée par l'égalité (6). *Nous ne pouvons donc assurer la stabilité de l'état initial si une partie de la surface limite se déforme en restant soumise à une pression uniforme et constante qui diffère de* 0.

II. — Sur les conditions suffisantes pour la stabilité initiale d'un milieu vitreux.

Les considérations précédentes s'appliquent, en particulier, aux milieux vitreux. Pour de tels milieux, on a [*Recherches sur l'Élasticité*, 2e Partie, égalités (6)]

$$(15) \qquad \rho_0\varphi_2 = \tfrac{1}{2}\Lambda(\rho_0, T_0)(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2 + \tfrac{1}{2}M(\rho_0, T_0)(2\varepsilon_1^2+2\varepsilon_2^2+2\varepsilon_3^2+\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2),$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(16) \qquad \rho_0\varphi_2 = \frac{3\Lambda(\rho_0, T_0)+2M(\rho_0, T_0)}{6}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2 + \frac{M(\rho_0, T_0)}{6}[2(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+2(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2+2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+3\gamma_1^2+3\gamma_2^2+3\gamma_3^2].$$

Le discriminant de φ_2, considéré comme forme quadratique en ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3, est

$$\begin{vmatrix} \Lambda+2M & \Lambda & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ \Lambda & \Lambda+2M & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda+2M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M \end{vmatrix}.$$

On en tire, à la manière habituelle, les conditions nécessaires et suffisantes pour que φ_2 soit une forme définie positive et l'on trouve que ces conditions se réduisent à

$$(17) \qquad \begin{cases} 3\Lambda(\rho_0, T_0)+2M(\rho_0, T_0) > 0, \\ M(\rho_0, T_0) > 0. \end{cases}$$

Ces deux inégalités équivalent ici à l'inégalité (13), ou à l'inégalité (14).

On en tire les deux inégalités

$$(18)\qquad \begin{cases} \Lambda(\rho_0, T_0) + 2M(\rho_0, T_0) > 0, \\ \Lambda(\rho_0, T_0) + M(\rho_0, T_0) > 0. \end{cases}$$

Ces inégalités (17) et (18) ont une grande importance dans une foule de questions d'élasticité statique. Si l'on désigne, en effet, par α le coefficient de compressibilité cubique du milieu et par E le coefficient d'élasticité de traction, on a (¹)

$$(19)\qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{3}{3\,\Lambda(\rho_0, T_0) + 2\,M(\rho_0, T_0)}, \\ E = \dfrac{\Lambda(\rho_0, T_0) + M(\rho_0, T_0)}{M(\rho_0, T_0)[3\,\Lambda(\rho_0, T_0) + 2\,M(\rho_0, T_0)]}. \end{cases}$$

Ces deux coefficients sont donc positifs en vertu des inégalités (17) et (18).

Si le milieu est dénué de viscosité et bon conducteur de la chaleur, la vitesse de propagation des vibrations longitudinales est donnée par l'égalité [*Recherches sur l'élasticité*, 2ᵉ Partie, égalité (76)]

$$(20)\qquad \mathcal{N} = \sqrt{\frac{\Lambda(\rho_0, T_0) + 2M(\rho_0, T_0)}{\rho_0}},$$

tandis que la vitesse de propagation des vibrations transversales est donnée par l'égalité [*Ibid.*, égalité (80)]

$$(21)\qquad \mathcal{N} = \sqrt{\frac{M(\rho_0, T_0)}{\rho_0}}.$$

Selon les inégalités (17) et (18), ces deux vitesses sont réelles.

Rappelons que, pour un milieu fluide, la dernière des inégalités (17) est remplacée par l'égalité

$$(22)\qquad M(\rho_0, T_0) = 0,$$

qui est alors vérifiée quels que soient ρ_0 et T_0.

(¹) LAMÉ, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, 2ᵉ édition, p. 75; 1866.

CHAPITRE II.

DES CONDITIONS NÉCESSAIRES POUR LA STABILITÉ D'UN MILIEU ÉLASTIQUE.

I. — Remarques diverses sur les petits mouvements d'un milieu élastique.

Quelles que soient les valeurs, finies ou infiniment petites, fonctions de a, b, c, que l'on attribue à ξ, η, ζ, nous continuerons à désigner par ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 les six grandeurs que définissent les égalités

$$(1)\quad \begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{\partial\xi}{\partial a}, & \varepsilon_2 = \dfrac{\partial\eta}{\partial b}, & \varepsilon_3 = \dfrac{\partial\zeta}{\partial c}, \\ \gamma_1 = \dfrac{\partial\eta}{\partial c} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial b}, & \gamma_2 = \dfrac{\partial\zeta}{\partial a} + \dfrac{\partial\xi}{\partial c}, & \gamma_3 = \dfrac{\partial\xi}{\partial b} + \dfrac{\partial\eta}{\partial a}, \end{cases}$$

tandis que nous désignerons par e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3 les six composantes de la déformation proprement dite, composantes qu'expriment les égalités

$$(23)\quad \begin{cases} e_1 = \dfrac{\partial\xi}{\partial a} + \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial a}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\eta}{\partial a}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial a}\right)^2\right], \\ e_2 = \dfrac{\partial\eta}{\partial b} + \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial b}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\eta}{\partial b}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial b}\right)^2\right], \\ e_3 = \dfrac{\partial\zeta}{\partial c} + \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial c}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\eta}{\partial c}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial c}\right)^2\right], \\ g_1 = \dfrac{\partial\eta}{\partial c} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial b} + \dfrac{\partial\xi}{\partial b}\dfrac{\partial\xi}{\partial c} + \dfrac{\partial\eta}{\partial b}\dfrac{\partial\eta}{\partial c} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial b}\dfrac{\partial\zeta}{\partial c}, \\ g_2 = \dfrac{\partial\zeta}{\partial a} + \dfrac{\partial\xi}{\partial c} + \dfrac{\partial\xi}{\partial c}\dfrac{\partial\xi}{\partial a} + \dfrac{\partial\eta}{\partial c}\dfrac{\partial\eta}{\partial a} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial c}\dfrac{\partial\zeta}{\partial a}, \\ g_3 = \dfrac{\partial\xi}{\partial b} + \dfrac{\partial\eta}{\partial a} + \dfrac{\partial\xi}{\partial a}\dfrac{\partial\xi}{\partial b} + \dfrac{\partial\eta}{\partial a}\dfrac{\partial\eta}{\partial b} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial a}\dfrac{\partial\zeta}{\partial b}. \end{cases}$$

Lorsqu'en tout point a, b, c du milieu, ξ, η, ζ seront infiniment petits AINSI QUE LEURS DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE EN a, b, c, *nous dirons que ξ, η, ζ sont,* PARTOUT, *infiniment petits.*

Lorsque ξ, η, ζ sont partout infiniment petits, on peut écrire

$$(24)\qquad \begin{cases} e_1 = \varepsilon_1 + \ldots, & e_2 = \varepsilon_2 + \ldots, & e_3 = \varepsilon_3 + \ldots, \\ g_1 = \gamma_1 + \ldots, & g_2 = \gamma_2 + \ldots, & g_3 = \gamma_3 + \ldots, \end{cases}$$

les signes $+\ldots$ désignant des quantités qui sont infiniment petites au moins du second ordre.

Quelles que soient les valeurs, finies ou infiniment petites, que l'on attribue à ξ, η, ζ, le potentiel interne du milieu déformé peut toujours se mettre sous la forme (2), à la condition d'écrire

$$(4\ bis)\qquad \begin{aligned} \Phi = {} & \varphi_0(\rho_0, T) + \varphi_1(\rho_0, T)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ & + \varphi_2(\rho_0, T, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) + \ldots, \end{aligned}$$

formule où le signe $+\ldots$ remplace des termes qui sont infiniment petits au moins du troisième ordre, lorsque ξ, η, ζ, sont, partout, infiniment petits du premier ordre.

D'ailleurs, l'égalité

$$(7)\qquad \Pi_0 = -\rho_0 \varphi_1(\rho_0, T)$$

demeure toujours valable.

Lorsque ξ, η, ζ sont partout infiniment petits, les quantités N_i, T_i sont données par les égalités (3); si donc on tient compte des égalités (4 *bis*) et (7), et si l'on suppose $T = T_0$, on pourra écrire

$$(25)\qquad \begin{cases} N_x = \Pi_0 - \rho_0 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \varepsilon_1} + \ldots, & N_y = \Pi_0 - \rho_0 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \varepsilon_2} + \ldots, & N_z = \Pi_0 - \rho_0 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \varepsilon_3} + \ldots, \\ T_x = -\rho_0 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_1} + \ldots, & T_y = -\rho_0 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_2} + \ldots, & T_z = -\rho_0 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_3} + \ldots, \end{cases}$$

les symboles $+\ldots$ désignant des termes qui sont infiniment petits au moins du second ordre lorsque ξ, η, ζ sont partout infiniment petits.

D'autre part, les actions de viscosité doivent dépendre d'une fonction dissipative qui sera, elle-même, dépendante de ρ_0, de T_0, et des six quantités que nous avons désignées (*Recherches sur l'élasticité*, 1re Partie, Chap. II, n° 5) par Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3, Γ'_1, Γ'_2, Γ'_3. La fonction dissipative doit d'ailleurs être une forme quadratique définie positive de

ces six dernières quantités. Mais, dans le cas où ξ, η, ζ sont partout infiniment petits, on peut, comme nous l'avons déjà remarqué, (*Recherches sur l'Élasticité*, 2e Partie, Chap. I, n° 2) confondre Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3, Γ'_1, Γ'_2, Γ'_3 avec

$$(26) \qquad \begin{cases} \varepsilon'_1 = \dfrac{\partial \varepsilon_1}{\partial t}, & \varepsilon'_2 = \dfrac{\partial \varepsilon_2}{\partial t}, & \varepsilon'_3 = \dfrac{\partial \varepsilon_3}{\partial t}, \\ \gamma'_1 = \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial t}, & \gamma'_2 = \dfrac{\partial \gamma_2}{\partial t}, & \gamma'_3 = \dfrac{\partial \gamma_3}{\partial t}, \end{cases}$$

en négligeant des infiniment petits du second ordre.

La fonction dissipative pourra donc s'écrire

$$\iiint \rho_0 \mathcal{F} \, da \, db \, dc$$

avec

$$(27) \qquad \mathcal{F} = f(\rho_0, T_0, \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3) + \ldots,$$

f étant une forme quadratique définie positive en ε'_1, ε'_2, ε'_3, γ'_1, γ'_2, γ'_3 et le symbole $+\ldots$ désignant un terme qui est infiniment petit au moins du troisième ordre lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont, partout, infiniment petits.

Dans ce dernier cas, on doit avoir

$$\begin{array}{lll} \nu_x = -\rho_0 \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon'_1}, & \nu_y = -\rho_0 \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon'_2}, & \nu_z = -\rho_0 \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon'_3}, \\ \tau_x = -\rho_0 \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \gamma'_1}, & \tau_y = -\rho_0 \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \gamma'_2}, & \tau_z = -\rho_0 \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \gamma'_3}. \end{array}$$

Nous pourrons donc écrire, d'une manière générale,

$$(28) \qquad \begin{cases} \nu_x = -\rho_0 \dfrac{\partial f}{\partial \varepsilon'_1} + \ldots, & \nu_y = -\rho_0 \dfrac{\partial f}{\partial \varepsilon'_2} + \ldots, & \nu_z = -\rho_0 \dfrac{\partial f}{\partial \varepsilon'_3} + \ldots, \\ \tau_x = -\rho_0 \dfrac{\partial f}{\partial \gamma'_1} + \ldots, & \nu_y = -\rho_0 \dfrac{\partial f}{\partial \gamma'_2} + \ldots, & \nu_z = -\rho_0 \dfrac{\partial f}{\partial \gamma'_3} + \ldots, \end{cases}$$

les signes $+\ldots$ désignant des termes qui sont infiniment petits au

moins du second ordre lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont, partout, infiniment petits.

Les équations indéfinies du mouvement sont

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{N}_x+\nu_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{T}_z+\tau_z)+\frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{T}_y+\tau_y)+\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=0,\\
&\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{T}_z+\tau_z)+\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{N}_y+\nu_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{T}_x+\tau_x)+\rho\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=0,\\
&\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{T}_y+\tau_y)+\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{T}_x+\tau_x)+\frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{N}_z+\nu_z)+\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=0.
\end{aligned}$$

Lorsque ξ, η, ζ tendent vers o, les dérivées $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial y}{\partial b}$, $\frac{\partial z}{\partial c}$ tendent vers 1; les autres dérivées de x, y, z par rapport à a, b, c, tendent vers o; en même temps, ρ tend vers ρ_0. Si l'on tient compte des égalités (25) et (28), et si l'on observe que Π_0 est indépendant de a, b, c, on peut mettre les équations précédentes sous la forme

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1}+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_1}\right)+\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_3}\right)+\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_2}\right)-\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+\ldots=0,\\
&\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_3}\right)+\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2}+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_2}\right)+\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_1}\right)-\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+\ldots=0,\\
&\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_2}\right)+\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_1}\right)+\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3}+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_3}\right)-\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}+\ldots=0.
\end{aligned}\right.$$

Dans ces équations, les symboles $+\ldots$ représentent des quantités qui sont infiniment petites au moins du second ordre lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont infiniment petits quels que soient a, b, c.

Formons maintenant les conditions aux limites.

En tout point de la partie immobile de la surface qui limite le milieu, on doit avoir, quel que soit t, les égalités

$$(8)\qquad \xi=0,\qquad \eta=0,\qquad \zeta=0.$$

Considérons maintenant un point matériel pris sur la partie déformable de la surface limite.

En l'état initial, cette surface était la surface Σ, le point matériel considéré y occupait la position μ; la demi-normale en μ, à la sur-

Dans ces équations (32), (33), (34) et (35), les signes $+\ldots$ désignent des quantités qui sont infiniment petites au moins du second ordre lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont, partout, infiniment petits.

II. — D'une condition nécessaire pour la stabilité initiale d'un milieu quelconque, cristallisé ou vitreux [1].

Nous allons, en premier lieu, démontrer la proposition suivante :

Si, en un milieu cristallisé, la fonction

$$\varphi_2(\rho_0, T_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

est une forme définie négative en ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3, *l'état initial du milieu ne saurait demeurer stable lorsque les diverses parties de la surface terminale sont maintenues immobiles.*

Supposons, en effet, que l'état initial du milieu soit stable.

Aux valeurs absolues initiales de ξ, η, ζ et de leurs dérivées partielles du premier ordre en a, b, c, de ξ', η', ζ', nous pouvons imposer des limites supérieures telles que les quantités

$$e_1, \quad e_2, \quad e_3, \qquad g_1, \quad g_2, \quad g_3,$$
$$\xi', \quad \eta', \quad \zeta'$$

demeurent toutes inférieures en valeur absolue à des limites données d'avance, et cela quel que soit t.

Donc, si l'état initial du milieu était un état d'équilibre stable, on pourrait limiter supérieurement les valeurs absolues initiales de ξ, η, ζ, et de leurs dérivées partielles du premier ordre en a, b, c, de ξ', η',

---

(1) *Considérations sur la stabilité et, particulièrement, sur la stabilité des corps élastiques* (*Procès-verbaux des séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, séance du 9 juillet 1903). — *D'une condition nécessaire pour la stabilité initiale d'un milieu élastique quelconque* (*Comptes rendus*, t. CXXXVIII, séance du 29 février 1904, p. 541).

Les égalités (25) deviennent

$$
(32)\quad \left\{
\begin{aligned}
N_x &= \Pi_0 - \Lambda(\rho_0, T_0)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) - 2M(\rho_0, T_0)\varepsilon_1 + \ldots, \\
N_y &= \Pi_0 - \Lambda(\rho_0, T_0)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) - 2M(\rho_0, T_0)\varepsilon_2 + \ldots, \\
N_z &= \Pi_0 - \Lambda(\rho_0, T_0)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) - 2M(\rho_0, T_0)\varepsilon_3 + \ldots, \\
T_x &= - M(\rho_0, T_0)\gamma_1 + \ldots, \\
T_y &= - M(\rho_0, T_0)\gamma_2 + \ldots, \\
T_z &= - M(\rho_0, T_0)\gamma_3 + \ldots,
\end{aligned}
\right.
$$

tandis que les égalités (28) prennent la forme

$$
(33)\quad \left\{
\begin{aligned}
\nu_x &= - \lambda(\rho_0, T_0)(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3) - 2\mu(\rho_0, T_0)\varepsilon'_1 + \ldots, \\
\nu_y &= - \lambda(\rho_0, T_0)(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3) - 2\mu(\rho_0, T_0)\varepsilon'_2 + \ldots, \\
\nu_z &= - \lambda(\rho_0, T_0)(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3) - 2\mu(\rho_0, T_0)\varepsilon'_3 + \ldots, \\
\tau_x &= - \mu(\rho_0, T_0)\gamma'_1 + \ldots, \\
\tau_y &= - \mu(\rho_0, T_0)\gamma'_2 + \ldots, \\
\tau_z &= - \mu(\rho_0, T_0)\gamma'_3 + \ldots.
\end{aligned}
\right.
$$

Les équations (29) deviennent

$$
(34)\quad \left\{
\begin{aligned}
&(\Lambda + M)\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial \eta}{\partial b} + \frac{\partial \zeta}{\partial c}\right) + M\,\Delta\xi \\
&\quad + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2}{\partial a\,\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial \eta}{\partial b} + \frac{\partial \zeta}{\partial c}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta\xi - \rho_0\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \ldots = 0, \\
&(\Lambda + M)\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial \eta}{\partial b} + \frac{\partial \zeta}{\partial c}\right) + M\,\Delta\eta \\
&\quad + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2}{\partial b\,\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial \eta}{\partial b} + \frac{\partial \zeta}{\partial c}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta\eta - \rho_0\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \ldots = 0, \\
&(\Lambda + M)\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial \eta}{\partial b} + \frac{\partial \zeta}{\partial c}\right) + M\,\Delta\zeta \\
&\quad (\lambda + \mu)\frac{\partial^2}{\partial c\,\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial \eta}{\partial b} + \frac{\partial \zeta}{\partial c}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta\zeta - \rho_0\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \ldots = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

tandis que les équations (30) prennent la forme

$$
(35)\quad \left\{
\begin{aligned}
&[\Lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2M\varepsilon_1]\alpha + M\gamma_3\beta + M\gamma_2\gamma \\
&\quad + [\lambda(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3) + 2\mu\varepsilon'_1]\alpha + \mu\gamma'_3\beta + \mu\gamma'_2\gamma + \ldots = 0, \\
&M\gamma_3\alpha + [\Lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2M\varepsilon_2]\beta + M\gamma_1\gamma \\
&\quad + \mu\gamma'_3\alpha + [\lambda(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3) + 2\mu\varepsilon'_2]\beta + \mu\gamma'_1\gamma + \ldots = 0, \\
&M\gamma_2\alpha + M\gamma_1\beta + [\Lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2M\varepsilon_3]\gamma \\
&\quad + \mu\gamma'_2\alpha + \mu\gamma'_1\beta + [\lambda(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3) + 2\mu\varepsilon'_3]\gamma + \ldots = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Dans ces équations (32), (33), (34) et (35), les signes $+ \ldots$ désignent des quantités qui sont infiniment petites au moins du second ordre lorsque $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ sont, partout, infiniment petits.

II. — D'une condition nécessaire pour la stabilité initiale d'un milieu quelconque, cristallisé ou vitreux (¹).

Nous allons, en premier lieu, démontrer la proposition suivante :

Si, en un milieu cristallisé, la fonction

$$\varphi_2(\rho_0, T_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

est une forme définie négative en $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, *l'état initial du milieu ne saurait demeurer stable lorsque les diverses parties de la surface terminale sont maintenues immobiles.*

Supposons, en effet, que l'état initial du milieu soit stable.

Aux valeurs absolues initiales de ξ, η, ζ et de leurs dérivées partielles du premier ordre en a, b, c, de ξ', η', ζ', nous pouvons imposer des limites supérieures telles que les quantités

$$\begin{gathered} e_1, \quad e_2, \quad e_3, \qquad g_1, \quad g_2, \quad g_3, \\ \xi', \quad \eta', \quad \zeta' \end{gathered}$$

demeurent toutes inférieures en valeur absolue à des limites données d'avance, et cela quel que soit t.

Donc, si l'état initial du milieu était un état d'équilibre stable, on pourrait limiter supérieurement les valeurs absolues initiales de ξ, η, ζ, et de leurs dérivées partielles du premier ordre en a, b, c, de ξ', η',

---

(¹) *Considérations sur la stabilité et, particulièrement, sur la stabilité des corps élastiques* (*Procès-verbaux des séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, séance du 9 juillet 1903). — *D'une condition nécessaire pour la stabilité initiale d'un milieu élastique quelconque* (*Comptes rendus*, t. CXXXVIII, séance du 29 février 1904, p. 541).

ζ' de telle sorte que la quantité

$$(36) \qquad U = -\iiint \varphi_2(\rho_0, T_0, e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3)\, da\, db\, dc + \frac{1}{2}\iiint (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)\, da\, db\, dc$$

demeure, quel que soit t, inférieure à une grandeur positive A donnée d'avance.

Les égalités (24) permettent d'écrire

$$(37) \qquad U = -\iiint \varphi_2(\rho_0, T_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\, da\, db\, dc + \frac{1}{2}\iiint (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)\, da\, db\, dc + \ldots,$$

$+\ldots$ désignant une quantité qui est infiniment petite, au moins du troisième ordre, lorsque ξ, η, ζ sont, partout, infiniment petits.

De l'égalité (37) on tire

$$(38) \quad \frac{dU}{dt} = -\iiint \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1}\varepsilon'_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2}\varepsilon'_2 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3}\varepsilon'_3 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}\gamma'_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}\gamma'_2 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}\gamma'_3 \right) da\, db\, dc + \iiint (\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'')\, da\, db\, dc + \ldots,$$

$+\ldots$ désignant encore un terme qui est infiniment petit, au moins du troisième ordre, lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont, partout, infiniment petits.

Mais les égalités (29) donnent

$$\begin{aligned}
&\iiint (\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'')\, da\, db\, dc \\
&= \iiint \Bigg\{ \left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1} + \frac{\partial f}{\partial\varepsilon_1}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3} + \frac{\partial f}{\partial\gamma_3}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2} + \frac{\partial f}{\partial\gamma_2}\right) \right]\xi' \\
&\qquad + \left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3} + \frac{\partial f}{\partial\gamma_3}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2} + \frac{\partial f}{\partial\varepsilon_2}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1} + \frac{\partial f}{\partial\gamma_1}\right) \right]\eta' \\
&\qquad + \left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2} + \frac{\partial f}{\partial\gamma_2}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1} + \frac{\partial f}{\partial\gamma_1}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3} + \frac{\partial f}{\partial\varepsilon_3}\right) \right]\zeta' \Bigg\} da\, db\, dc \\
&\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$+\ldots$ désignant des termes qui sont infiniment petits au moins du troisième ordre lorsque $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ sont partout infiniment petits.

Cette égalité, à son tour, peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&\int\int\int(\xi'\xi''+\eta'\eta''+\zeta'\zeta'')\,da\,db\,dc \\
=&-\int\Big\{\left[\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1}+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_1}\right)\alpha+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_3}\right)\beta+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_2}\right)\gamma\right]\xi' \\
&\quad+\left[\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_3}\right)\alpha+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2}+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_2}\right)\beta+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_1}\right)\gamma\right]\eta' \\
&\quad+\left[\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_2}\right)\alpha+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_1}\right)\beta+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3}+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_3}\right)\gamma\right]\zeta'\Big\}\,d\Sigma \\
&-\int\int\int\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1}\varepsilon'_1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2}\varepsilon'_2+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3}\varepsilon'_3+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}\gamma'_1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}\gamma'_2+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}\gamma'_3\right)da\,db\,dc \\
&-\int\int\int\left(\frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_1}\varepsilon'_1+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_2}\varepsilon'_2+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_3}\varepsilon'_3+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_1}\gamma'_1+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_2}\gamma'_2+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_3}\gamma'_3\right)da\,db\,dc \\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Mais tout point de la surface Σ est un point immobile, cas auquel, en ce point, on a, quel que soit t, les égalités (8), qui entraînent les égalités

$$(8\ bis) \qquad \xi'=0, \qquad \eta'=0, \qquad \zeta'=0;$$

l'intégrale par laquelle débute le second membre de l'égalité précédente porte sur une quantité nulle. Au même second membre, on peut, en vertu du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes, remplacer la somme

$$\frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_1}\varepsilon'_1+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_2}\varepsilon'_2+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_3}\varepsilon'_3+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_1}\gamma'_1+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_2}\gamma'_2+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_3}\gamma'_3$$

par $2f$; l'égalité précédente se réduit donc à

$$\begin{aligned}
&\int\int\int(\xi'\xi''+\eta'\eta''+\zeta'\zeta'')\,da\,db\,dc \\
=&-\int\int\int\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1}\varepsilon'_1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2}\varepsilon'_2+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3}\varepsilon'_3+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}\gamma'_1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}\gamma'_2+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}\gamma'_3\right)da\,db\,dc \\
&-2\int\int\int f\,da\,db\,dc+\ldots,
\end{aligned}$$

et l'égalité (38) peut s'écrire

$$(39)\quad \frac{dU}{dt} = -2\int\int\int\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1}\varepsilon'_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2}\varepsilon'_2 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3}\varepsilon'_3 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}\gamma'_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}\gamma'_2 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}\gamma'_3\right) da\,db\,dc$$
$$-2\int\int\int f\,da\,db\,dc + \dots$$

De cette égalité (39) une nouvelle différentiation par rapport à t tire l'égalité

$$(40)\quad \frac{d^2U}{dt^2} = -2\int\int\int\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1}\varepsilon'_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2}\varepsilon'_2 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3}\varepsilon'_3 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}\gamma'_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}\gamma'_2 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}\gamma'_3\right)^{(2)} da\,db\,dc$$
$$-2\int\int\int\Bigg[\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1} + \frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_1}\right)\varepsilon''_1 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2} + \frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_2}\right)\varepsilon''_2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3} + \frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_3}\right)\varepsilon''_3$$
$$+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_1}\right)\gamma''_1 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_2}\right)\gamma''_2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_3}\right)\gamma''_3\Bigg] da\,db\,dc$$
$$-\dots\dots\dots\dots,$$

où (2) représente un carré symbolique.

Or on a

$$\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1}\varepsilon'_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2}\varepsilon'_2 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3}\varepsilon'_3 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}\gamma'_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}\gamma'_2 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}\gamma'_3\right)^{(2)}$$
$$= \varphi_2(\rho_0, T_0, \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3).$$

D'autre part on a

$$\int\int\int\Bigg[\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1} + \frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_1}\right)\varepsilon''_1 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2} + \frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_2}\right)\varepsilon''_2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3} + \frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_3}\right)\varepsilon''_3$$
$$+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_1}\right)\gamma''_1 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_2}\right)\gamma''_2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_3}\right)\gamma''_3\Bigg] da\,db\,dc$$
$$= -\int\int\Bigg\{\left[\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1} + \frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_1}\right)\alpha + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_3}\right)\beta + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_2}\right)\gamma\right]\xi''$$
$$+\left[\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_3}\right)\alpha + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2} + \frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_2}\right)\beta + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_1}\right)\gamma\right]\eta''$$
$$+\left[\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_2}\right)\alpha + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_1}\right)\beta + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3} + \frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_3}\right)\gamma\right]\zeta''\Bigg\} d\Sigma$$
$$-\int\int\int\Bigg\{\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1} + \frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_1}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_3}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_2}\right)\right]\xi''$$
$$+\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_3}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2} + \frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_2}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_1}\right)\right]\eta''$$
$$+\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_2}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_1}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3} + \frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_3}\right)\right]\zeta''\Bigg\} da\,db\,dc$$
$$-\dots\dots\dots\dots$$

Au second membre de cette égalité, la première intégrale porte sur une quantité nulle. En effet, l'élément $d\Sigma$ est immobile et l'on a alors, quel que soit t, les égalités (8 *bis*), qui entraînent les égalités

$$(8\ ter)\qquad \xi''=0,\qquad \eta''=0,\qquad \zeta''=0.$$

Quant à la seconde intégrale, on peut la transformer au moyen des égalités (29).

Tout compte fait, l'égalité (40) peut s'écrire

$$(41)\quad \begin{aligned} \frac{d^2U}{dt^2} = &-\iiint \varphi_2(\rho_0, T_0, \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3)\, da\, db\, dc \\ &+\iiint \Bigg\{ \left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1}+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_1}\right)+\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_3}\right)+\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_2}\right)\right]^2 \\ &\qquad + \left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_3}\right)+\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2}+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_2}\right)+\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_1}\right)\right]^2 \\ &\qquad + \left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_2}\right)+\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_1}\right)+\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3}+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_3}\right)\right]^2 \Bigg\}\, da\, db\, dc \\ &+\ldots\ldots \end{aligned}$$

Le signe $+\ldots$ continue à désigner des termes qui sont infiniment petits au moins du troisième ordre lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont, partout, infiniment petits.

Le terme explicitement écrit en l'expression (41) de $\frac{d^2U}{dt^2}$ peut-il s'annuler? Si l'on tient compte de l'hypothèse faite au sujet de φ, on voit que, pour que ce terme s'annule, il faut et il suffit que l'on ait

$$(42)\quad \begin{cases} \varphi_2(\rho_0, T_0, \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1}+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_1}\right)+\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_3}\right)+\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_2}\right)=0, \\ \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_3}\right)+\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3}+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_2}\right)+\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_1}\right)=0, \\ \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_2}\right)+\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_1}\right)+\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3}+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_3}\right)=0. \end{cases}$$

La première des égalités (42) exige que l'on ait, quels que soient a, b, c,

$$(43)\qquad \varepsilon'_1=0,\quad \varepsilon'_2=0,\quad \varepsilon'_3=0,\quad \gamma'_1=0,\quad \gamma'_2=0,\quad \gamma'_3=0,$$

en sorte que les trois dernières deviennent

$$(44)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial a}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \varepsilon_1} + \dfrac{\partial}{\partial b}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_3} + \dfrac{\partial}{\partial c}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_2} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial a}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_3} + \dfrac{\partial}{\partial b}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \varepsilon_2} + \dfrac{\partial}{\partial c}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_1} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial a}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_2} + \dfrac{\partial}{\partial b}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_1} + \dfrac{\partial}{\partial c}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \varepsilon_3} = 0. \end{cases}$$

Les égalités (44) entraînent l'égalité

$$\begin{aligned} \iiint\Big[&\left(\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_3} + \frac{\partial}{\partial c}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_2}\right)\xi \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_3} + \frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varepsilon_2} + \frac{\partial}{\partial c}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_1}\right)\eta \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_2} + \frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_1} + \frac{\partial}{\partial c}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varepsilon_3}\right)\zeta\Big]\, da\, db\, dc = 0 \end{aligned}$$

qui devient, en vertu des égalités (1),

$$(45)\quad \begin{aligned} \iiint&\left(\varepsilon_1\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varepsilon_1} + \varepsilon_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varepsilon_2} + \varepsilon_3\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varepsilon_3} + \gamma_1\frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_1} + \gamma_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_2} + \gamma_3\frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_3}\right) da\, db\, dc \\ &+ \int\Big[\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varepsilon_1}\alpha + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_3}\beta + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_2}\gamma\right)\xi \\ &\qquad + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_3}\alpha + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varepsilon_2}\beta + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_1}\gamma\right)\eta \\ &\qquad + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_2}\alpha + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_1}\beta + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varepsilon_3}\gamma\right)\zeta\Big]\, d\Sigma = 0. \end{aligned}$$

Au premier membre de cette égalité (45), la seconde intégrale s'annule, car ξ, η, ζ sont nuls en tout point de la surface Σ. Si l'on tient compte, en outre, du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes, cette égalité devient

$$\iiint \varphi_2(\rho_0, T_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\, da\, db\, dc = 0.$$

La fonction φ_2 ne pouvant être négative, elle exige que l'on ait, quels que soient a, b, c,

$$\varphi_2(\rho_0, T_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = 0$$

ou bien, puisque φ_2 est une forme définie positive en ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3,

$$(46)\qquad \varepsilon_1 = 0,\quad \varepsilon_2 = 0,\quad \varepsilon_3 = 0,\quad \gamma_1 = 0,\quad \gamma_2 = 0,\quad \gamma_3 = 0.$$

Les égalités (43) et (46) sont donc les conditions nécessaires et suffisantes pour que le terme explicitement écrit, en l'expression (41), de $\frac{d^2U}{dt^2}$ soit égal à *zéro*.

Les égalités (46) équivalent aux égalités

$$(47)\qquad \begin{cases} \xi = \lambda_1 + \omega_2 c - \omega_3 b, \\ \eta = \lambda_2 + \omega_3 a - \omega_1 c, \\ \zeta = \lambda_3 + \omega_1 b - \omega_2 a, \end{cases}$$

tandis que les égalités (43) équivalent aux égalités

$$(48)\qquad \begin{cases} \xi' = \lambda'_1 + \omega'_2 c - \omega'_3 b, \\ \eta' = \lambda'_2 + \omega'_3 a - \omega'_1 c, \\ \zeta' = \lambda'_3 + \omega'_1 b - \omega'_2 c, \end{cases}$$

$$(49)\qquad \begin{cases} \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\quad \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3, \\ \lambda'_1,\ \lambda'_2,\ \lambda'_3,\quad \omega'_1,\ \omega'_2,\ \omega'_3, \end{cases}$$

étant douze quantités indépendantes de a, b, c. Mais les quantités ξ, η, ζ, données par les égalités (47), doivent, selon les conditions (8), s'annuler en tout point de la surface Σ; selon les conditions (8 *bis*), il en doit être de même des quantités ξ', η', ζ' données par les égalités (48); pour cela, il faut et il suffit que les douze constantes (49) soient égales à 0, ce qui nous donne, quels que soient a, b, c,

$$(50)\qquad \begin{cases} \xi = 0,\quad \eta = 0,\quad \zeta = 0, \\ \xi' = 0,\quad \eta' = 0,\quad \zeta' = 0. \end{cases}$$

Telles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que s'annule la quantité explicitement écrite en l'expression (41) de $\frac{d^2U}{dt^2}$.

Les termes explicitement écrits en l'expression (41) de $\frac{d^2U}{dt^2}$ sont donc infiniment petits du second ordre lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont,

partout, infiniment petits du premier ordre; leur somme ne s'annule que lorsque les six quantités ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont nulles quels que soient a, b, c; hors ce cas, cette somme est essentiellemeut positive.

Les termes non explicitement écrits sont infiniment petits du troisième ordre lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont, partout, infiniment petits.

On peut donc limiter supérieurement les valeurs absolues de ξ, η, ζ, de leurs dérivées partielles du premier ordre en a, b, c et de ξ', η', ζ' de telle sorte que $\frac{d^2U}{dt^2}$ soit sûrement positif; pour qu'il en soit ainsi quel que soit t, il suffira, si le système est stable, d'imposer des limites supérieures suffisamment petites aux valeurs absolues initiales de ξ, η, ζ, ξ', η', ζ'.

Considérons maintenant la valeur initiale de $\frac{dU}{dt}$, valeur qui se tire de l'égalité (39).

Lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont partout infiniment petits, les termes explicitement écrits sont, en général, infiniment petits du second ordre, tandis que les termes représentés par $+\ldots$ sont infiniment petits du troisième ordre au moins.

Supposons les valeurs initiales ξ'_0, η'_0, ζ'_0, de ξ', η', ζ' liées aux valeurs initiales ξ_0, η_0, ζ_0, de ξ, η, ζ par les relations

$$\xi'_0 = K^2\xi_0, \qquad \eta'_0 = K^2\eta_0, \qquad \zeta'_0 = K^2\zeta_0,$$

où K^2 est une quantité positive indépendante de a, b, c.

Le premier terme de $\left(\frac{dU}{dt}\right)_0$ deviendra évidemment

$$-K^2\int\int\int\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1}\varepsilon_{10}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2}\varepsilon_{20}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3}\varepsilon_{30}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}\gamma_{10}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}\gamma_{20}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}\gamma_{30}\right)da\,db\,dc$$

ou, selon le théorème d'Euler,

$$-2K^2\int\int\int\varphi_2(\varepsilon_{10}, \varepsilon_{20}, \varepsilon_{30}, \gamma_{10}, \gamma_{20}, \gamma_{30})\,da\,db\,dc,$$

quantité essentiellement positive si l'on n'a pas

$$\varepsilon_{10} = 0, \quad \varepsilon_{20} = 0, \quad \varepsilon_{30} = 0, \quad \gamma_{10} = 0, \quad \gamma_{20} = 0, \quad \gamma_{30} = 0.$$

Si ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont infiniment petits, il résulte des égalités (34) que nous aurons, en tout point (a, b, c) et à tout instant t,

$$(\Lambda + 2M)\Delta\theta + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial t}\Delta\theta - \rho_0\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + \ldots = 0 \tag{53}$$

et aussi

$$\left\{\begin{aligned} &M\,\Delta\omega_1 + \mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta\omega_1 - \rho_0\frac{\partial^2\omega_1}{\partial t^2} + \ldots = 0,\\ &M\,\Delta\omega_2 + \mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta\omega_2 - \rho_0\frac{\partial^2\omega_2}{\partial t^2} + \ldots = 0,\\ &M\,\Delta\omega_3 + \mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta\omega_3 - \rho_0\frac{\partial^2\omega_3}{\partial t^2} + \ldots = 0.\end{aligned}\right. \tag{54}$$

Dans ces équations, comme dans les équations (34) dont elles découlent, les symboles $+\ldots$ remplacent des termes qui sont infiniment petits au moins du second ordre lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont, partout, infiniment petits du premier ordre.

Ces préliminaires posés, considérons l'expression

$$\Psi = (\Lambda + 2M)\iiint(\Delta\theta)^2\,da\,db\,dc, \tag{55}$$

où nous supposerons tout d'abord l'intégrale étendue au volume que limite une surface Σ dont tous les points sont à une distance finie du point O; nous pourrons ensuite faire croître au delà de toute limite tous les rayons vecteurs de cette surface sans que l'intégrale cesse d'avoir un sens.

De l'égalité (55), nous tirerons

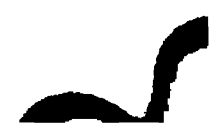
$$\frac{d\Psi}{dt} = 2(\Lambda + 2M)\int\Delta\theta\,\Delta\theta'\,d\varpi, \tag{56}$$

puis

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} = 2(\Lambda + 2M)\int(\Delta\theta')^2 d\varpi + 2(\Lambda + 2M)\int\Delta\theta\,\Delta\theta''\,d\varpi. \tag{57}$$

Dans ces égalités on a posé, pour simplifier les formules,

$$da\,db\,dc = d\varpi,\qquad \frac{\partial\theta}{\partial t} = \theta',\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \theta''.$$



l'état d'équilibre initial de ce milieu ne peut demeurer stable lorsqu'on suppose fixés les divers points de la surface qui le limite. Cette proposition demeure vraie que le milieu soit exempt de viscosité ou qu'il en soit doué, que cette viscosité tende à gêner ou à favoriser le mouvement.

III. — Établissement de diverses formules qui serviront à discuter la stabilité initiale d'un milieu vitreux [1].

C'est à la considération des seuls milieux vitreux que notre analyse va maintenant s'attacher.

Nous supposerons ces milieux illimités; nous supposerons en outre que *les régions infiniment éloignées sont maintenues immobiles;* et, d'une manière précise, voici ce que nous entendrons par là :

Soit r la distance d'un point (a, b, c) à l'origine des coordonnées; nous admettrons que, lorsque r croît au delà de toute limite, les fonctions

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\qquad \xi',\ \eta',\ \zeta',\qquad \xi'',\ \eta'',\ \zeta''$$

tendent vers o *à la façon de fonctions potentielles;* c'est-à-dire que ces fonctions tendent vers o; qu'il en est de même des produits par r de leurs dérivées partielles du premier ordre en a, b, c; des produits par r^2 de leurs dérivées partielles du second ordre en a, b, c.

Que ξ, η, ζ soient finis ou infiniment petits, nous poserons, en toutes circonstances,

$$(52)\qquad \left\{\begin{aligned} \theta &= \frac{\partial\xi}{\partial a}+\frac{\partial\eta}{\partial b}+\frac{\partial\zeta}{\partial c},\\ \omega_1 &= \frac{\partial\zeta}{\partial b}-\frac{\partial\eta}{\partial c},\\ \omega_2 &= \frac{\partial\xi}{\partial c}-\frac{\partial\zeta}{\partial a},\\ \omega_3 &= \frac{\partial\eta}{\partial a}-\frac{\partial\xi}{\partial b}. \end{aligned}\right.$$

[1] *Sur quelques formules utiles pour discuter la stabilité d'un milieu vitreux* (*Comptes rendus*, t. CXXXVIII, p. 737, séance du 21 mars 1904).

Considérons maintenant l'expression

$$(60) \qquad \psi = \rho_0 \int \left[\left(\frac{\partial \theta'}{\partial a} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta'}{\partial b} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta'}{\partial c} \right)^2 \right] d\varpi.$$

Nous aurons

$$\frac{d\psi}{dt} = 2\rho_0 \int \left(\frac{\partial \theta'}{\partial a} \frac{\partial \theta''}{\partial a} + \frac{\partial \theta'}{\partial b} \frac{\partial \theta''}{\partial b} + \frac{\partial \theta'}{\partial c} \frac{\partial \theta''}{\partial c} \right) d\varpi,$$

ce que l'égalité (53) permet d'écrire

$$\begin{aligned} (61) \qquad \frac{d\psi}{dt} = {} & 2(\Delta + 2M) \int \left(\frac{\partial \theta'}{\partial a} \frac{\partial \Delta\theta}{\partial a} + \frac{\partial \theta'}{\partial b} \frac{\partial \Delta\theta}{\partial b} + \frac{\partial \theta'}{\partial c} \frac{\partial \Delta\theta}{\partial c} \right) d\varpi \\ & + 2(\lambda + 2\mu) \int \left(\frac{\partial \theta'}{\partial a} \frac{\partial \Delta\theta'}{\partial a} + \frac{\partial \theta'}{\partial b} \frac{\partial \Delta\theta'}{\partial b} + \frac{\partial \theta'}{\partial c} \frac{\partial \Delta\theta'}{\partial c} \right) d\varpi \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

le signe $+\ldots$ désignant des termes qui sont infiniment petits du troisième ordre lorsque $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ sont, partout, infiniment petits.

D'ailleurs, l'égalité (61) peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} (62) \qquad \frac{d\psi}{dt} = {} & - 2(\Lambda + 2M) \int \Delta\theta \, \Delta\theta' \, d\varpi - 2(\lambda + 2\mu) \int (\Delta\theta')^2 \, d\varpi \\ & - 2(\Delta + 2M) \int \Delta\theta \frac{\partial \theta'}{\partial n_i} d\Sigma - 2(\lambda + 2\mu) \int \Delta\theta' \frac{\partial \theta'}{\partial n_i} d\Sigma \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si l'on fait croître au delà de toute limite tous les rayons vecteurs de la surface Σ, cette formule se réduit à

$$(63) \qquad \frac{d\psi}{dt} = - 2(\Lambda + 2M) \int \Delta\theta \, \Delta\theta' \, d\varpi - 2(\lambda + 2\mu) \int (\Delta\theta')^2 \, d\varpi + \ldots.$$

Revenons à la formule générale (61); elle donne

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dt^2} = {} & 2(\Lambda + 2M) \int \left(\frac{\partial \theta'}{\partial a} \frac{\partial \Delta\theta'}{\partial a} + \frac{\partial \theta'}{\partial b} \frac{\partial \Delta\theta'}{\partial b} + \frac{\partial \theta'}{\partial c} \frac{\partial \Delta\theta'}{\partial c} \right) d\varpi \\ & + 2(\Lambda + 2M) \int \left(\frac{\partial \Delta\theta}{\partial a} \frac{\partial \theta''}{\partial a} + \frac{\partial \Delta\theta}{\partial b} \frac{\partial \theta''}{\partial b} + \frac{\partial \Delta\theta}{\partial c} \frac{\partial \theta''}{\partial c} \right) d\varpi \\ & + 2(\lambda + 2\mu) \int \left(\frac{\partial \Delta\theta'}{\partial a} \frac{\partial \theta''}{\partial a} + \frac{\partial \Delta\theta'}{\partial b} \frac{\partial \theta''}{\partial b} + \frac{\partial \Delta\theta'}{\partial c} \frac{\partial \theta''}{\partial c} \right) d\varpi \\ & + 2(\lambda + 2\mu) \int \left(\frac{\partial \theta'}{\partial a} \frac{\partial \Delta\theta''}{\partial a} + \frac{\partial \theta'}{\partial b} \frac{\partial \Delta\theta''}{\partial b} + \frac{\partial \theta'}{\partial c} \frac{\partial \Delta\theta''}{\partial c} \right) d\varpi \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

L'égalité (53) donne

$$\Delta\theta'' = \frac{\Lambda + 2M}{\rho_0} \Delta\Delta\theta + \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0} \Delta\Delta\theta' + \ldots.$$

en sorte que l'égalité (57) devient

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Psi}{dt^2} &= 2(\Lambda + 2M)\int(\Delta\theta')^2 d\varpi \\ &+ \frac{2(\Lambda+2M)^2}{\rho_0}\int\Delta\theta\,\Delta\Delta\theta\, d\varpi + \frac{2(\Lambda + 2M)(\lambda + 2\mu)}{\rho_0}\int\Delta\theta\,\Delta\Delta\theta'\, d\varpi \\ &+ \ldots\end{aligned}$$

Cette égalité, à son tour, peut s'écrire

$$(58)\quad \begin{aligned}\frac{d^2\Psi}{dt^2} &= 2(\Lambda + 2M)\int(\Delta\theta')^2 d\varpi \\ &- \frac{2(\Lambda + 2M)^2}{\rho_0}\int\left[\left(\frac{\partial\Delta\theta}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Delta\theta}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Delta\theta}{\partial c}\right)^2\right] d\varpi \\ &- \frac{2(\Lambda + 2M)(\lambda + 2\mu)}{\rho_0}\int\left(\frac{\partial\Delta\theta}{\partial a}\frac{\partial\Delta\theta'}{\partial a} + \frac{\partial\Delta\theta}{\partial b}\frac{\partial\Delta\theta'}{\partial b} + \frac{\partial\Delta\theta}{\partial c}\frac{\partial\Delta\theta'}{\partial c}\right) d\varpi \\ &+ \frac{2(\Lambda + 2M)^2}{\rho_0}\int\Delta\theta\frac{\partial\Delta\theta}{\partial n_i} d\Sigma \\ &+ \frac{2(\Lambda + 2M)(\lambda + 2\mu)}{\rho_0}\int\Delta\theta\frac{\partial\Delta\theta'}{\partial n_i} d\Sigma \\ &+ \ldots\end{aligned}$$

Dans cette égalité, n_i est la normale à l'élément $d\Sigma$, dirigée vers l'intérieur du volume occupé par le milieu.

Si l'on fait croître au delà de toute limite tous les rayons vecteurs de la surface Σ, l'égalité (58) devient

$$(59)\quad \begin{aligned}\frac{d^2\Psi}{dt^2} &= 2(\Lambda + 2M)\int(\Delta\theta')^2 d\varpi \\ &+ \frac{2(\Lambda + 2M)^2}{\rho_0}\int\left[\left(\frac{\partial\Delta\theta}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Delta\theta}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Delta\theta}{\partial c}\right)^2\right] d\varpi \\ &- \frac{2(\Lambda + 2M)(\lambda + 2\mu)}{\rho_0}\int\left(\frac{\partial\Delta\theta}{\partial a}\frac{\partial\Delta\theta'}{\partial a} + \frac{\partial\Delta\theta}{\partial b}\frac{\partial\Delta\theta'}{\partial b} + \frac{\partial\Delta\theta}{\partial c}\frac{\partial\Delta\theta'}{\partial c}\right) d\varpi \\ &+ \ldots\end{aligned}$$

Dans les égalités (58) et (59), le symbole $+\ldots$ remplace des termes qui sont infiniment petits au moins du troisième ordre lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont, partout, infiniment petits.

Considérons maintenant l'expression

$$\psi = \rho_0 \int \left[\left(\frac{\partial \theta'}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta'}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta'}{\partial c}\right)^2 \right] d\varpi. \tag{60}$$

Nous aurons

$$\frac{d\psi}{dt} = 2\rho_0 \int \left(\frac{\partial \theta'}{\partial a}\frac{\partial \theta''}{\partial a} + \frac{\partial \theta'}{\partial b}\frac{\partial \theta''}{\partial b} + \frac{\partial \theta'}{\partial c}\frac{\partial \theta''}{\partial c} \right) d\varpi,$$

ce que l'égalité (53) permet d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} = {} & 2(\Delta + 2\mathrm{M}) \int \left(\frac{\partial \theta'}{\partial a}\frac{\partial \Delta\theta}{\partial a} + \frac{\partial \theta'}{\partial b}\frac{\partial \Delta\theta}{\partial b} + \frac{\partial \theta'}{\partial c}\frac{\partial \Delta\theta}{\partial c} \right) d\varpi \\ & + 2(\lambda + 2\mu) \int \left(\frac{\partial \theta'}{\partial a}\frac{\partial \Delta\theta'}{\partial a} + \frac{\partial \theta'}{\partial b}\frac{\partial \Delta\theta'}{\partial b} + \frac{\partial \theta'}{\partial c}\frac{\partial \Delta\theta'}{\partial c} \right) d\varpi \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{61}$$

le signe $+\ldots$ désignant des termes qui sont infiniment petits du troisième ordre lorsque $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ sont, partout, infiniment petits.

D'ailleurs, l'égalité (61) peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} = {} & -2(\Lambda + 2\mathrm{M}) \int \Delta\theta\, \Delta\theta'\, d\varpi - 2(\lambda + 2\mu) \int (\Delta\theta')^2\, d\varpi \\ & - 2(\Delta + 2\mathrm{M}) \int \Delta\theta \frac{\partial \theta'}{\partial n_i} d\Sigma - 2(\lambda + 2\mu) \int \Delta\theta' \frac{\partial \theta'}{\partial n_i} d\Sigma \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{62}$$

Si l'on fait croître au delà de toute limite tous les rayons vecteurs de la surface Σ, cette formule se réduit à

$$\frac{d\psi}{dt} = -2(\Lambda + 2\mathrm{M}) \int \Delta\theta\, \Delta\theta'\, d\varpi - 2(\lambda + 2\mu) \int (\Delta\theta')^2\, d\varpi + \ldots. \tag{63}$$

Revenons à la formule générale (61); elle donne

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dt^2} = {} & 2(\Lambda + 2\mathrm{M}) \int \left(\frac{\partial \theta'}{\partial a}\frac{\partial \Delta\theta'}{\partial a} + \frac{\partial \theta'}{\partial b}\frac{\partial \Delta\theta'}{\partial b} + \frac{\partial \theta'}{\partial c}\frac{\partial \Delta\theta'}{\partial c} \right) d\varpi \\ & + 2(\Lambda + 2\mathrm{M}) \int \left(\frac{\partial \Delta\theta}{\partial a}\frac{\partial \theta''}{\partial a} + \frac{\partial \Delta\theta}{\partial b}\frac{\partial \theta''}{\partial b} + \frac{\partial \Delta\theta}{\partial c}\frac{\partial \theta''}{\partial c} \right) d\varpi \\ & + 2(\lambda + 2\mu) \int \left(\frac{\partial \Delta\theta'}{\partial a}\frac{\partial \theta''}{\partial a} + \frac{\partial \Delta\theta'}{\partial b}\frac{\partial \theta''}{\partial b} + \frac{\partial \Delta\theta'}{\partial c}\frac{\partial \theta''}{\partial c} \right) d\varpi \\ & + 2(\lambda + 2\mu) \int \left(\frac{\partial \theta'}{\partial a}\frac{\partial \Delta\theta''}{\partial a} + \frac{\partial \theta'}{\partial b}\frac{\partial \Delta\theta''}{\partial b} + \frac{\partial \theta'}{\partial c}\frac{\partial \Delta\theta''}{\partial c} \right) d\varpi \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

L'égalité (53) transforme cette dernière égalité en

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\psi}{dt^2} = {} & 2(\Lambda + 2\mathrm{M})\int\left(\frac{\partial\theta'}{\partial a}\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial a} + \frac{\partial\theta'}{\partial b}\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial b} + \frac{\partial\theta'}{\partial c}\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial c}\right)d\varpi \\
& + \frac{2}{\rho_0}\int\left\{\left[(\Lambda + 2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial a} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial a}\right]^2\right. \\
& \qquad + \left[(\Lambda + 2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial b} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial b}\right]^2 \\
& \qquad \left. + \left[(\Lambda + 2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial c} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial c}\right]^2\right\}d\varpi \\
& + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\rho_0}\int\left\{\left[(\Lambda + 2\mathrm{M})\frac{\partial}{\partial a}\Delta\,\Delta\theta + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial a}\Delta\,\Delta\theta'\right]\frac{\partial\theta'}{\partial a}\right. \\
& \qquad + \left[(\Lambda + 2\mathrm{M})\frac{\partial b}{\partial}\Delta\,\Delta\theta + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial b}\Delta\,\Delta\theta'\right]\frac{\partial\theta'}{\partial b} \\
& \qquad \left. + \left[(\Lambda + 2\mathrm{M})\frac{\partial}{\partial c}\Delta\,\Delta\theta + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial c}\Delta\,\Delta\theta'\right]\frac{\partial\theta'}{\partial c}\right\}d\varpi
\end{aligned}
$$

....

Cette égalité, à son tour, peut s'écrire

$$
\begin{aligned}
(64)\quad \frac{d^2\psi}{dt^2} = {} & -2(\Lambda + 2\mathrm{M})\int(\Delta\theta')^2\,d\varpi - 2(\Lambda + 2\mathrm{M})\int\Delta\theta'\frac{\partial\theta'}{\partial n_i}\,d\Sigma \\
& + \frac{2}{\rho_0}\int\left\{\left[(\Lambda + 2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial a} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial a}\right]^2\right. \\
& \qquad + \left[(\Lambda + 2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial b} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial b}\right]^2 \\
& \qquad \left. + \left[(\Lambda + 2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial c} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial c}\right]^2\right\}d\varpi \\
& + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\rho_0}\int\left\{\left[(\Lambda + 2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial a} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial a}\right]\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial a}\right. \\
& \qquad + \left[(\Lambda + 2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial b} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial b}\right]\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial b} \\
& \qquad \left. + \left[(\Lambda + 2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial c} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial c}\right]\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial c}\right\}d\varpi \\
& + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\rho_0}\int\left\{\left[(\Lambda + 2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial a} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial a}\right]\frac{\partial}{\partial n_i}\frac{\partial\theta'}{\partial a}\right. \\
& \qquad + \left[(\Lambda + 2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial b} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial b}\right]\frac{\partial}{\partial n_i}\frac{\partial\theta'}{\partial b} \\
& \qquad \left. + \left[(\Lambda + 2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial c} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial c}\right]\frac{\partial}{\partial n_i}\frac{\partial\theta'}{\partial c}\right\}d\Sigma
\end{aligned}
$$

$$+\frac{2(\lambda+2\mu)}{\rho_0}\int\Bigg\{\frac{\partial\theta'}{\partial a}\frac{\partial}{\partial n_i}\left[(\Lambda+2\mathrm{M})\frac{\partial\Delta\theta}{\partial a}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial\Delta\theta'}{\partial a}\right]$$
$$+\frac{\partial\theta'}{\partial b}\frac{\partial}{\partial n_i}\left[(\Lambda+2\mathrm{M})\frac{\partial\Delta\theta}{\partial b}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial\Delta\theta'}{\partial b}\right]$$
$$+\frac{\partial\theta'}{\partial c}\frac{\partial}{\partial n_i}\left[(\Lambda+2\mathrm{M})\frac{\partial\Delta\theta}{\partial c}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial\Delta\theta'}{\partial c}\right]\Bigg\}d\Sigma$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on fait croître au delà de toute limite tous les rayons vecteurs de la surface Σ, cette formule se simplifie et devient

$$(65)\quad \frac{d^2\psi}{dt^2}=-2(\Lambda+2\mathrm{M})\int(\Delta\theta')^2\,d\varpi$$
$$+\frac{2}{\rho_0}\int\Bigg\{\left[(\Lambda+2\mathrm{M})\frac{\partial\Delta\theta}{\partial a}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial\Delta\theta'}{\partial a}\right]^2$$
$$+\left[(\Lambda+2\mathrm{M})\frac{\partial\Delta\theta}{\partial b}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial\Delta\theta'}{\partial b}\right]^2$$
$$+\left[(\Lambda+2\mathrm{M})\frac{\partial\Delta\theta}{\partial c}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial\Delta\theta'}{\partial c}\right]^2\Bigg\}d\varpi$$
$$+\frac{2(\lambda+2\mu)}{\rho_0}\int\Bigg\{\left[(\Lambda+2\mathrm{M})\frac{\partial\Delta\theta}{\partial a}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial\Delta\theta'}{\partial a}\right]\frac{\partial\Delta\theta'}{\partial a}$$
$$+\left[(\Lambda+2\mathrm{M})\frac{\partial\Delta\theta}{\partial b}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial\Delta\theta'}{\partial b}\right]\frac{\partial\Delta\theta'}{\partial b}$$
$$+\left[(\Lambda+2\mathrm{M})\frac{\partial\Delta\theta}{\partial c}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial\Delta\theta'}{\partial c}\right]\frac{\partial\Delta\theta'}{\partial c}\Bigg\}d\varpi$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dans les égalités (64) et (65), le signe $+\ldots$ représente des termes qui sont infiniment petits du troisième ordre lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont, partout, infiniment petits.

Considérons maintenant l'expression, analogue à l'expression (55),

$$(66)\qquad \mathrm{P}=\mathrm{M}\int\int\int[(\Delta\omega_1)^2+(\Delta\omega_2)^2+(\Delta\omega_3)^2]\,da\,db\,dc,$$

que, par abréviation, nous écrirons

$$(67)\qquad \mathrm{P}=\mathrm{M}\sum\int(\Delta\omega)^2\,d\varpi.$$

De cette égalité (67) nous tirerons

$$(68)\qquad \frac{dP}{dt} = 2M\sum\int \Delta\omega\,\Delta\omega'\,d\varpi.$$

Raisonnant ensuite comme nous l'avons fait pour tirer l'égalité (59) de l'égalité (56), mais en substituant dans nos déductions les égalités (54) à l'égalité (53), nous trouverons que l'on a, pour un milieu indéfini,

$$(69)\qquad \begin{aligned}\frac{d^2P}{dt^2} &= 2M\sum\int(\Delta\omega')^2\,d\varpi\\ &-\frac{2M^2}{\rho_0}\sum\int\left[\left(\frac{\partial\,\Delta\omega}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial\,\Delta\omega}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial\,\Delta\omega}{\partial c}\right)^2\right]d\varpi\\ &-\frac{2M\mu}{\rho_0}\sum\int\left(\frac{\partial\,\Delta\omega}{\partial a}\frac{\partial\,\Delta\omega'}{\partial a}+\frac{\partial\,\Delta\omega}{\partial b}\frac{\partial\,\Delta\omega'}{\partial b}+\frac{\partial\,\Delta\omega}{\partial c}\frac{\partial\,\Delta\omega'}{\partial c}\right)d\varpi\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Dans cette égalité, le signe $+\ldots$ désigne des termes qui sont infiniment petits au moins du troisième ordre lorsque ξ, η, ζ sont, partout, infiniment petits.

Considérons enfin l'expression, analogue à l'expression (60),

$$(70)\qquad p = \rho_0\sum\int\left[\left(\frac{\partial\omega'}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega'}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega'}{\partial c}\right)^2\right]d\varpi.$$

Raisonnons comme nous l'avons fait pour tirer l'égalité (63) de l'égalité (60), mais en faisant usage des égalités (54) au lieu de l'égalité (53); nous trouverons que l'on a, pour un milieu indéfini,

$$(71)\qquad \begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= -2M\sum\int\Delta\omega\,\Delta\omega'\,d\varpi - 2\mu\sum\int(\Delta\omega')^2\,d\varpi,\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

$+\ldots$ désignant encore des termes infiniment petits du troisième ordre lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont, partout, infiniment petits.

En raisonnant comme nous l'avons fait pour obtenir la formule (65),

nous trouverons que l'on a, pour un milieu indéfini,

$$
(72) \quad \begin{aligned}
\frac{d^2 p}{dt^2} = & - 2M \sum \int (\Delta\omega')^2 \, d\varpi \\
& + \frac{2}{\rho_0} \sum \int \left[\left(M \frac{\partial \Delta\omega}{\partial a} + \mu \frac{\partial \Delta\omega'}{\partial a} \right)^2 \right. \\
& \qquad + \left(M \frac{\partial \Delta\omega}{\partial b} + \mu \frac{\partial \Delta\omega'}{\partial b} \right)^2 \\
& \qquad \left. + \left(M \frac{\partial \Delta\omega}{\partial c} + \mu \frac{\partial \Delta\omega'}{\partial c} \right)^2 \right] d\varpi \\
& + \frac{2\mu}{\rho_0} \sum \int \left[\left(M \frac{\partial \Delta\omega}{\partial a} + \mu \frac{\partial \Delta\omega'}{\partial a} \right) \frac{\partial \Delta\omega'}{\partial a} \right. \\
& \qquad + \left(M \frac{\partial \Delta\omega}{\partial b} + \mu \frac{\partial \Delta\omega'}{\partial b} \right) \frac{\partial \Delta\omega'}{\partial b} \\
& \qquad \left. + \left(M \frac{\partial \Delta\omega}{\partial c} + \mu \frac{\partial \Delta\omega'}{\partial c} \right) \frac{\partial \Delta\omega'}{\partial c} \right] d\varpi \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

$+\ldots$ désignant toujours des termes infiniment petits au moins du troisième ordre lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont infiniment petits

Ces diverses formules vont nous permettre d'établir plusieurs propositions touchant la stabilité des milieux vitreux.

IV. — D'une autre condition nécessaire pour la stabilité d'un milieu vitreux illimité (1).

La première proposition que nous démontrerons est la suivante :

Considérons un milieu vitreux indéfini dont les régions infiniment éloignées sont maintenues immobiles. L'état initial de ce milieu ne pourrait sûrement pas être un état d'équilibre stable si l'on avait à la fois les

---

(1) *Considérations sur la stabilité et, particulièrement, sur la stabilité des corps élastiques* (*Procès-verbaux des séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, Séance du 25 juin 1903). — *D'une condition nécessaire pour la stabilité d'un milieu vitreux illimité* (*Comptes rendus*, t. CXXXVIII, p. 541, séance du 29 février 1904).

deux inégalités

$$(73) \qquad \Lambda + 2M < 0, \qquad M < 0.$$

Cette proposition est vraie que le milieu soit dénué de viscosité ou doué de viscosité; elle demeurerait vraie si les actions de viscosité étaient des puissances actives au lieu d'être des résistances passives.

Cette proposition nous donne des renseignements plus complets que la proposition démontrée pour les milieux vitreux à la fin du paragraphe II. En effet, si les inégalités (52) entrainent les inégalités (73), les inégalités (73), au contraire, pourraient fort bien être vérifiées sans que $(3\Lambda + 2M)$ fût négatif. Il est vrai que la proposition démontrée à la fin du paragraphe II s'applique à un milieu limité par une surface immobile quelconque, tandis que celle-ci suppose le milieu illimité en tout sens.

Pour démontrer cette proposition, considérons la fonction

$$(74) \qquad U = -\Psi + \psi - P + p.$$

En vertu des égalités (55), (60), (66) et (70), et des inégalités (73), cette grandeur ne pourra jamais être négative. Si l'on impose aux valeurs absolues de θ, θ', ω_1, ω_2, ω_3, ω'_1, ω'_2, ω'_3, des limites supérieures convenables, U sera sûrement inférieur à une quantité positive quelconque A, donnée d'avance. Si donc l'état initial du système était stable, on pourrait sûrement aux valeurs absolues initiales de ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' imposer des limites supérieures telles que U n'atteigne la valeur A pour aucune valeur de t.

Les égalités (56), (63), (68), (71) et (74) permettent d'écrire

$$(75) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial U}{dt} = & -4(\Lambda + 2M)\int \Delta\theta\,\Delta\theta'\,d\varpi - 4M\sum\int \Delta\omega\,\Delta\omega'\,d\varpi \\ & -2(\lambda + 2\mu)\int (\Delta\theta')^2\,d\varpi - 2\mu\sum\int(\Delta\omega')^2\,d\varpi \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

$+\ldots$ désignant des quantités qui sont infiniment petites au moins du troisième ordre lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont, partout, infiniment petits.

Les égalités (59), (65), (69), (72) et (74) donnent, à leur tour,

$$
(76)\quad \begin{aligned}
\frac{d^2 U}{dt^2} = &-4(\Lambda + 2M)\int (\Delta\theta')^2 \, d\varpi \\
&+ \frac{4}{\rho_0}\int \Big\{ \left[(\Lambda + 2M)\frac{\partial \Delta\theta}{\partial a} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial \Delta\theta'}{\partial a} \right]^2 \\
&\qquad + \left[(\Lambda + 2M)\frac{\partial \Delta\theta}{\partial b} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial \Delta\theta'}{\partial b} \right]^2 \\
&\qquad + \left[(\Lambda + 2M)\frac{\partial \Delta\theta}{\partial c} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial \Delta\theta'}{\partial c} \right]^2 \Big\} d\varpi \\
&- 4M \sum \int (\Delta\omega')^2 \, d\varpi \\
&+ \frac{4}{\rho_0}\sum \int \Big[\left(M\frac{\partial \Delta\omega}{\partial a} + \mu \frac{\partial \Delta\omega'}{\partial a} \right)^2 \\
&\qquad + \left(M\frac{\partial \Delta\omega}{\partial b} + \mu \frac{\partial \Delta\omega'}{\partial b} \right)^2 \\
&\qquad + \left(M\frac{\partial \Delta\omega}{\partial c} + \mu \frac{\partial \Delta\omega'}{\partial c} \right)^2 \Big] d\varpi \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Le signe $+\ldots$ désigne toujours des infiniment petits d'ordre supérieur par rapport à $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$.

Peut-il arriver que le terme explicitement écrit au second membre de l'égalité (76) soit nul? Pour cela, en vertu des inégalités (73), il faut et il suffit que l'on ait, quels que soient a, b, c :

$$
(77)\qquad \Delta\theta' = 0,
$$

$$
(78)\qquad \left\{ \begin{aligned}
&(\Lambda + 2M)\frac{\partial \Delta\theta}{\partial a} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial \Delta\theta'}{\partial a} = 0, \\
&(\Lambda + 2M)\frac{\partial \Delta\theta}{\partial b} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial \Delta\theta'}{\partial b} = 0, \\
&(\Lambda + 2M)\frac{\partial \Delta\theta}{\partial c} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial \Delta\theta'}{\partial c} = 0,
\end{aligned} \right.
$$

$$
(79)\qquad \Delta\omega'_1 = 0, \qquad \Delta\omega'_2 = 0, \qquad \Delta\omega'_3 = 0,
$$

$$
(80)\qquad \left\{ \begin{aligned}
&M\frac{\partial \Delta\omega_i}{\partial a} + \mu\frac{\partial \Delta\omega'_i}{\partial a} = 0, \\
&M\frac{\partial \Delta\omega_i}{\partial b} + \mu\frac{\partial \Delta\omega'_i}{\partial b} = 0, \\
&M\frac{\partial \Delta\omega_i}{\partial c} + \mu\frac{\partial \Delta\omega'_i}{\partial c} = 0, \\
&\qquad (i = 1, 2, 3).
\end{aligned} \right.
$$

En vertu de l'égalité (77) et de la première inégalité (73), les égalités (78) deviennent

$$\frac{\partial \Delta\theta}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta\theta}{\partial b} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta\theta}{\partial c} = 0$$

et, comme $\Delta\theta$ est nul à l'infini,

$$\Delta\theta = 0. \tag{81}$$

De même, en vertu des égalités (79) et de la seconde inégalité (73), les égalités (80) deviennent

$$\frac{\partial \Delta\omega_i}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta\omega_i}{\partial b} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta\omega_i}{\partial c} = 0$$

et, comme $\Delta\omega_i$ est nul à l'infini,

$$\Delta\omega_1 = 0, \qquad \Delta\omega_2 = 0, \qquad \Delta\omega_3 = 0. \tag{82}$$

Les quantités

$$\begin{gathered} \theta, \quad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3, \\ \theta', \quad \omega'_1, \quad \omega'_2, \quad \omega'_3 \end{gathered}$$

doivent, dans tout l'espace, vérifier les équations (81), (82), (77) et (79); elles doivent, en outre, s'annuler à l'infini; cela exige que l'on ait, dans tout l'espace,

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0, \qquad \omega_3 = 0, \tag{83}$$

$$\theta = 0, \tag{84}$$

$$\omega'_1 = 0, \qquad \omega'_2 = 0, \qquad \omega'_3 = 0, \tag{85}$$

$$\theta' = 0. \tag{86}$$

Les égalités (83) et (85), jointes aux trois dernières égalités (52), montrent qu'il existe deux fonctions $F(a, b, c)$, $F'(a, b, c)$, finies continues et uniformes dans tout l'espace, telles que l'on ait

$$\left\{ \begin{aligned} \xi &= -\frac{\partial F}{\partial a}, & \eta &= -\frac{\partial F}{\partial b}, & \zeta &= -\frac{\partial F}{\partial c}, \\ \xi' &= -\frac{\partial F'}{\partial a}, & \eta' &= -\frac{\partial F'}{\partial b}, & \zeta' &= -\frac{\partial F'}{\partial c}. \end{aligned} \right. \tag{87}$$

Les égalités (84), (86), (87), jointes à la première égalité (55), exigent que l'on ait, dans tout l'espace,

$$\Delta F = 0, \qquad \Delta F' = 0.$$

F et F' sont donc de simples constantes et les égalités (87) deviennent

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0,$$
$$\xi' = 0, \qquad \eta' = 0, \qquad \zeta' = 0.$$

Telles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que le terme explicitement écrit au second membre de l'égalité (76) devienne égal à o.

Hors ces conditions, ce terme est essentiellement positif; il est infiniment petit du second ordre lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont, partout, infiniment petits.

On voit donc que, tant que les valeurs absolues de ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' et de leurs dérivées partielles du premier ordre en a, b, c ne surpasseront pas certaines limites, $\frac{d^2U}{dt^2}$ aura sûrement le signe de son premier terme et sera positif; si l'équilibre initial du système était stable, on pourrait limiter supérieurement les valeurs absolues initiales de ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' et de leurs dérivées partielles du premier ordre en a, b, c, de telle sorte que $\frac{d^2U}{dt^2}$ ne puisse devenir négatif pour aucune valeur de t.

Considérons, d'autre part, la valeur prise, à l'instant $t = 0$, par la quantité $\frac{dU}{dt}$ qu'exprime l'égalité (11).

Posons, à cet instant $t = 0$,

$$\xi'_0 = K^2 \xi_0, \qquad \eta'_0 = K^2 \eta_0, \qquad \zeta'_0 = K^2 \zeta_0.$$

L'égalité (75) nous donne alors

$$\begin{aligned}\left(\frac{dU}{dt}\right)_0 = &- 4K^2(\Lambda + 2M)\int(\Delta\theta_0)^2\, d\varpi - 4K^2 M \sum \int (\Delta\omega_0)^2\, d\varpi \\ &- 2K^4(\lambda + 2\mu)\int(\Delta\theta_0)^2\, d\varpi - 2K^4 \mu \sum \int (\Delta\omega_0)^2\, d\varpi \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Visiblement, nous pourrons prendre pour K^2, ξ_0, η_0, ζ_0 et pour les dérivées partielles en a, b, c de ξ_0, η_0, ζ_0, des valeurs assez petites pour que $\left(\frac{dU}{dt}\right)_0$ ait le signe des termes qui, au second membre, occupent la première ligne, et ces termes sont positifs.

Si donc l'état initial du système était un état d'équilibre stable, nous pourrions disposer des valeurs initiales de ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' de telle sorte que les trois conditions suivantes fussent sûrement remplies :

1° U ne surpasserait pour aucune valeur de t une quantité positive A, arbitrairement donnée d'avance;

2° La valeur initiale de $\frac{dU}{dt}$ serait positive;

3° $\frac{d^2U}{dt^2}$ ne serait négatif pour aucune valeur de t.

Les deux dernières conditions contredisent la première; le théorème énoncé est donc démontré.

V. — Le postulat des petits mouvements.

Les démonstrations précédentes ont la rigueur introduite dans les questions de ce genre par M. Liapounoff et par M. Hadamard. Nous allons obtenir d'autres propositions par des démonstrations un peu moins rigoureuses en ce qu'elles impliquent un postulat que nous avons déjà invoqué dans l'étude de la stabilité des fluides (1). Commençons par énoncer avec précision ce postulat, que nous nommerons le *postulat des petits mouvements*.

Considérons un milieu isotrope, dont une partie de la surface est maintenue immobile, tandis que le reste de la surface supporte une pression normale, uniforme et constante. Donnons à ce milieu un mouvement; à l'instant t, le point matériel dont les coordonnées initiales sont a, b, c, aura pour coordonnées

$$x = a + \xi(a, b, c, t), \qquad y = b + \eta(a, b, c, t), \qquad z = c + \zeta(a, b, c, t).$$

(1) *Sur la stabilité et les petits mouvements des corps fluides* (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. IX, p. 233; 1903).

Supposons que les valeurs absolues de ξ, η, ζ admettent, quel que soit t, une limite supérieure A

$$|\xi| \leqq A, \qquad |\eta| \leqq A, \qquad |\zeta| \leqq A \tag{88}$$

et que l'on ait de même, quel que soit t,

$$\left\{\begin{array}{lll} \left|\dfrac{\partial\xi}{\partial a}\right| \leqq rA, & \dots\dots\dots\dots, & \left|\dfrac{\partial\zeta}{\partial c}\right| \leqq rA, \\ \left|\dfrac{\partial\xi}{\partial t}\right| \leqq r'A, & \left|\dfrac{\partial\eta}{\partial t}\right| \leqq r'A, & \left|\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}\right| \leqq r'A, \\ \left|\dfrac{\partial^2\xi}{\partial a^2}\right| \leqq r''A, & \left|\dfrac{\partial^2\xi}{\partial a\,\partial b}\right| \leqq r''A, & \dots\dots\dots\dots, \\ \left|\dfrac{\partial^2\xi}{\partial a\,\partial t}\right| \leqq r'''A, & \dots\dots\dots\dots, & \left|\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial c\,\partial t}\right| \leqq r'''A, \\ \left|\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right| \leqq r^{\text{IV}}A, & \left|\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right| \leqq r^{\text{IV}}A, & \left|\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right| \leqq r^{\text{IV}}A, \end{array}\right. \tag{88 bis}$$

$r, r', r'', r''', r^{\text{IV}}$, étant des constantes positives données une fois pour toutes.

Reportons-nous à ce qui a été dit au paragraphe I, et nous voyons que, toutes les fois que A est suffisamment petit, ξ, η, ζ, nuls en tout point de la partie de la surface terminale qui est maintenue immobile, vérifient les équations (34) en tout point (a, b, c) du milieu et les équations (35) en tout point de la partie de la surface terminale qui supporte une pression invariable. Dans ces équations, le symbole $+\dots$ remplace des termes qui sont infiniment petits au moins de l'ordre de A^2.

Cette proposition n'est point douteuse; elle est le fondement des considérations développées aux paragraphes II et IV. Voici maintenant la proposition très voisine que nous lui substituons :

Si A est inférieur à une certaine limite, on a, quel que soit t,

$$\xi = u + lA^2, \qquad \eta = v + mA^2, \qquad \zeta = w + nA^2, \tag{89}$$

l, m, n étant trois quantités qui, quels que soient a, b, c, t, et quelque petit que soit A, ne surpassent pas en valeur absolue une certaine grandeur positive fixe F; dont, en outre, les dérivées partielles du premier et du second ordre en a, b, c, t admettent également des limites supérieures fixes.

Dans les égalités (89), u, v, w sont trois fonctions de a, b, c, t, définies de la manière suivante :

1° Pour toutes valeurs de a, b, c, t, on a

$$
(90) \quad \left\{
\begin{aligned}
&(\Lambda + \mathrm{M})\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial c}\right) + \mathrm{M}\,\Delta u \\
&+ (\lambda + \mu)\frac{\partial^2}{\partial a\,\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial c}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta u - \rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\
&(\Lambda + \mathrm{M})\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial c}\right) + \mathrm{M}\,\Delta v \\
&+ (\lambda + \mu)\frac{\partial^2}{\partial b\,\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial c}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta v - \rho_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \\
&(\Lambda + \mathrm{M})\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial c}\right) + \mathrm{M}\,\Delta w \\
&+ (\lambda + \mu)\frac{\partial^2}{\partial c\,\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial c}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta w - \rho_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

2° En tout point de la partie maintenue immobile de la surface limite, on a

$$
(91) \qquad u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0.
$$

3° En tout point de la partie de la surface limite qui supporte une pression invariable, on a

$$
(92) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\left[\Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial c}\right) + 2\mathrm{M}\frac{\partial u}{\partial a}\right]\alpha + \mathrm{M}\left(\frac{\partial u}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial a}\right)\beta + \mathrm{M}\left(\frac{\partial w}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial c}\right)\gamma \\
&+ \left[\lambda\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial c}\right) + 2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial a\,\partial t}\right]\alpha + \mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial a}\right)\beta + \mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial c}\right)\gamma = 0, \\
&\mathrm{M}\left(\frac{\partial u}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial a}\right)\alpha + \left[\Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial c}\right) + 2\mathrm{M}\frac{\partial v}{\partial b}\right]\beta + \mathrm{M}\left(\frac{\partial v}{\partial c} + \frac{\partial w}{\partial b}\right)\gamma \\
&+ \mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial a}\right)\alpha + \left[\lambda\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial c}\right) + 2\mu\frac{\partial^2 v}{\partial b\,\partial t}\right]\beta + \mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial c} + \frac{\partial w}{\partial b}\right)\gamma = 0, \\
&\mathrm{M}\left(\frac{\partial w}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial c}\right)\alpha + \mathrm{M}\left(\frac{\partial v}{\partial c} + \frac{\partial w}{\partial b}\right)\beta + \left[\Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial c}\right) + 2\mathrm{M}\frac{\partial w}{\partial c}\right]\gamma \\
&+ \mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial c}\right)\alpha + \mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial c} + \frac{\partial w}{\partial b}\right)\beta + \left[\lambda\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial c}\right) + 2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial c\,\partial t}\right]\gamma = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

4° A l'instant $t = 0$, on a, quels que soient a, b, c,

$$(93)\qquad \begin{cases} u = \xi, & v = \eta, & w = \zeta, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial \xi}{\partial t}, & \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial \eta}{\partial t}, & \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial \zeta}{\partial t}. \end{cases}$$

Les équations (90) et (92), qui doivent déterminer u, v, w, ne diffèrent des équations (34) et (35), que doivent vérifier ξ, η, ζ, que par la suppression des termes représentés par $+\ldots$, lesquels sont infiniment petits par rapport aux termes explicitement écrits.

Mais, bien que les équations qui déterminent ξ, η, ζ diffèrent infiniment peu de celles qui déterminent u, v, w, bien que ces quantités et leurs dérivées par rapport à t soient identiques à l'instant initial, il n'est nullement prouvé que les quantités $(\xi - u)$, $(\eta - v)$, $(\zeta - w)$ soient toujours infiniment petites du second ordre. *De ce que deux systèmes d'équations aux dérivées partielles diffèrent infiniment peu l'un de l'autre, on ne saurait conclure que leurs intégrales correspondant aux mêmes conditions initiales, diffèrent infiniment peu.*

Donc, en écrivant les égalités (89), nous admettons implicitement l'exactitude d'un postulat non démontré.

Néanmoins, comme, dans une foule de questions du même genre, les plus grands géomètres ont fait usage de ce postulat, nous allons en user à notre tour au numéro suivant.

VI. — Modifications (¹) que le postulat des petits mouvements permet d'apporter aux propositions démontrées au n° I.

Le postulat des petits mouvements permet, tout d'abord, de rendre un peu plus complètes les propositions énoncées et démontrées au n° I.

Il permet, en premier lieu, d'*étendre le théorème que nous avons for-*

(¹) *Sur les conditions nécessaires pour la stabilité initiale d'un milieu vitreux* (*Procès-verbaux de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux,* séance du 2 avril 1903).

mulé pour tous les milieux vitreux ou cristallisés au cas où la surface qui limite le milieu étudié, au lieu d'être entièrement fixe, serait en partie déformable et soumise, dans sa partie déformable, à une pression invariable.

Il permet, en second lieu, d'apporter un autre complément au corollaire, relatif aux milieux vitreux, que nous avions tiré de ce théorème; ce corollaire, ainsi complété à deux reprises, se formulera de la manière suivante :

Si l'on a, en un milieu vitreux, les deux conditions

$$(94) \qquad \begin{cases} 3\Lambda + 2\mathrm{M} \leqq 0, \\ \mathrm{M} \leqq 0, \end{cases}$$

dont l'une au moins ne se réduit pas à une égalité, le milieu ne peut demeurer en équilibre stable lorsque les diverses parties de sa surface terminale sont ou maintenues immobiles, ou soumises à une pression invariable.

Nous nous contenterons de démontrer cette dernière proposition, laissant au lecteur le soin, d'ailleurs aisé, d'établir la première.

Posons, en effet,

$$(95) \qquad \begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{\partial u}{\partial a}, \qquad \varepsilon_2 = \dfrac{\partial v}{\partial b}, \qquad \varepsilon_3 = \dfrac{\partial w}{\partial c}, \\ \gamma_1 = \dfrac{\partial w}{\partial b} + \dfrac{\partial v}{\partial c}, \qquad \gamma_2 = \dfrac{\partial u}{\partial c} + \dfrac{\partial w}{\partial a}, \qquad \gamma_3 = \dfrac{\partial v}{\partial b} + \dfrac{\partial u}{\partial a} \end{cases}$$

et considérons l'expression

$$(96) \quad \begin{aligned} \mathrm{U} = -\frac{1}{6}\int\int\int \Big\{ & (3\Lambda + 2\mathrm{M})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 \\ & + 2\mathrm{M}[(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + 3\gamma_1^2 + 3\gamma_2^2 + 3\gamma_3^2]\Big\}\, da\, db\, dc \\ & + \frac{1}{2}\rho_0 \int\int\int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right] da\, db\, dc \end{aligned}$$

nuls quel que soit t, ce qui donne

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = 0;$$

ou bien l'élément dS appartient à la partie déformable de la surface S; alors les égalités (92) y sont vérifiées. En toute circonstance, les égalités (98) et (99) nous donnent

$$(100) \quad \begin{aligned} \frac{dU}{dt} = &-\frac{2}{3}\int \Big\{ (3\Lambda + 2M)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t}\right) \\ &+ 2M\Big[(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\left(\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t}\right) + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)\left(\frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t}\right) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t}\right) \\ &+ 3\gamma_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + 3\gamma_2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial t} + 3\gamma_3 \frac{\partial \gamma_3}{\partial t}\Big]\Big\} d\varpi \\ &- \frac{1}{3}\int \Big\{ (3\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t}\right)^2 \\ &+ 2\mu\Big[\left(\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t}\right)^2 \\ &+ 3\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial t}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial t}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial \gamma_3}{\partial t}\right)^2\Big]\Big\} d\varpi. \end{aligned}$$

Formons maintenant $\dfrac{d^2U}{dt^2}$.

Nous pouvons écrire

$$(101) \quad \begin{aligned} \frac{d^2U}{dt^2} = &-\frac{2}{3}\int \Big\{ (3\Lambda + 2M)\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t}\right)^2 \\ &+ 2M\Big[\left(\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t}\right)^2 \\ &+ 3\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial t}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial t}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial \gamma_3}{\partial t}\right)^2\Big]\Big\} d\varpi \\ &- 2\int \Big\{ \Big[\Lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2M\varepsilon_1 + \lambda\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t}\right) + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t}\Big] \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial t^2} \\ &+ \Big[\Lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2M\varepsilon_2 + \lambda\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t}\right) + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t}\Big] \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial t^2} \\ &+ \Big[\Lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2M\varepsilon_3 + \lambda\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t}\right) + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t}\Big] \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial t^2} \\ &+ \left(M\gamma_1 + \mu \frac{\partial \gamma_1}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial t^2} + \left(M\gamma_2 + \mu \frac{\partial \gamma_2}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial t^2} + \left(M\gamma_3 + \mu \frac{\partial \gamma_3}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 \gamma_3}{\partial t^2}\Big\} d\varpi. \end{aligned}$$

La seconde intégrale peut s'écrire

$$2\int\Big\{\Big[\Lambda(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+2\mathrm{M}\varepsilon_1+\lambda\Big(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}+\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial t}+\frac{\partial\varepsilon_3}{\partial t}\Big)+2\mu\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}\Big]\alpha$$
$$+\Big(\mathrm{M}\gamma_3+\mu\frac{\partial\gamma_3}{\partial t}\Big)\beta+\Big(\mathrm{M}\gamma_2+\mu\frac{\partial\gamma_2}{\partial t}\Big)\gamma\Big\}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,d\mathrm{S}$$
$$+2\int\Big\{\Big[\Lambda(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+2\mathrm{M}\varepsilon_2+\lambda\Big(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}+\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial t}+\frac{\partial\varepsilon_3}{\partial t}\Big)+2\mu\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial t}\Big]\beta$$
$$+\Big(\mathrm{M}\gamma_1+\mu\frac{\partial\gamma_1}{\partial t}\Big)\gamma+\Big(\mathrm{M}\gamma_3+\mu\frac{\partial\gamma_3}{\partial t}\Big)\alpha\Big\}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,d\mathrm{S}$$
$$+2\int\Big\{\Big[\Lambda(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+2\mathrm{M}\varepsilon_3+\lambda\Big(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}+\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial t}+\frac{\partial\varepsilon_3}{\partial t}\Big)+2\mu\frac{\partial\varepsilon_3}{\partial t}\Big]\gamma$$
$$+\Big(\mathrm{M}\gamma_2+\mu\frac{\partial\gamma_2}{\partial t}\Big)\alpha+\Big(\mathrm{M}\gamma_1+\mu\frac{\partial\gamma_1}{\partial t}\Big)\beta\Big\}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,d\mathrm{S}$$
$$+2\int\Big\{\Big[(\Lambda+\mathrm{M})\frac{\partial}{\partial a}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\mathrm{M}\Delta u+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial a\,\partial t}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta u\Big]\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$+\Big[(\Lambda+\mathrm{M})\frac{\partial}{\partial b}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\mathrm{M}\Delta v+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial b\,\partial t}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta v\Big]\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$
$$+\Big[(\Lambda+\mathrm{M})\frac{\partial}{\partial c}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\mathrm{M}\Delta w+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial c\,\partial t}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta w\Big]\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\Big\}\,d\varpi.$$

Dans cette expression, les trois premières intégrales sont nulles; en effet, ou bien l'élément dS est immobile, cas auquel u, v, w sont nuls, quel que soit t, ce qui donne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0;$$

ou bien l'élément dS supporte une pression invariable, cas auquel les égalités (92) y sont vérifiées.

Quant à la dernière intégrale, on peut la transformer en y remplaçant u, v, w par leurs valeurs tirées des égalités (90). Finalement, l'égalité (101) devient

$$(102)\qquad \frac{d^2\mathrm{U}}{dt^2}=-\frac{2}{3}\int\Big\{(3\Lambda+2\mathrm{M})\Big(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}+\frac{d\varepsilon_2}{dt}+\frac{\partial\varepsilon_3}{\partial t}\Big)$$
$$+2\mathrm{M}\Big[\Big(\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial t}-\frac{\partial\varepsilon_3}{\partial t}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\varepsilon_3}{\partial t}-\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}-\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial t}\Big)^2$$
$$+3\Big(\frac{\partial\gamma_1}{\partial t}\Big)^2+3\Big(\frac{\partial\gamma_2}{\partial t}\Big)^2-3\Big(\frac{\partial\gamma_3}{\partial t}\Big)^2\Big]\Big\}\,d\varpi$$

$$+\frac{2}{\rho_0}\int\Big\{\Big[(\Lambda+M)\frac{\partial}{\partial a}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+M\,\Delta u$$
$$+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial a\,\partial t}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta u\Big]^2$$
$$+\Big[(\Lambda+M)\frac{\partial}{\partial b}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+M\,\Delta v$$
$$+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial b\,\partial t}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta v\Big]^2$$
$$+\Big[(\Lambda+M)\frac{\partial}{\partial c}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+M\,\Delta w$$
$$+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial c\,\partial t}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta w\Big]^2\Big\}\,d\varpi.$$

A l'instant $t=0$, rien ne nous empêche d'associer aux valeurs que nous choisirons pour u, v, w des valeurs de $u'=\frac{\partial u}{\partial t}$, $v'=\frac{\partial v}{\partial t}$, $w'=\frac{\partial w}{\partial t}$ données par les formules

$$u'=K^2u,\qquad v'=K^2v,\qquad w'=K^2w,$$

K^2 étant un coefficient indépendant de x, y, z. Alors, au second membre de l'égalité (100), la première intégrale deviendra

$$-\frac{2K^2}{3}\int\big\{(3\Lambda+2M)(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2$$
$$+2M[(\varepsilon_3-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_1-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^2+3\gamma_1^2+3\gamma_2^2+3\gamma_3^2]\big\}\,d\varpi,$$

tandis que la seconde deviendra

$$-\frac{K^4}{3}\int\big\{(3\lambda+2\mu)(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2$$
$$+2\mu[(\varepsilon_3-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_1-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^2+3\gamma_1^2+3\gamma_2^2+3\gamma_3^2]\big\}\,d\varpi.$$

En vertu des conditions (94), dont l'une au moins ne se réduit pas à une égalité, nous pouvons choisir u, v, w de telle sorte que leurs valeurs absolues ne franchissent pas les limites qui leur sont imposées et que la première des deux intégrales précédentes soit positive.

Nous pouvons ensuite choisir K^2 si petit que les valeurs absolues de u', v', w' deviennent inférieures aux limites qui leur sont imposées

et que la seconde intégrale soit inférieure en valeur absolue à la première.

Dès lors, la valeur initiale de $\frac{dU}{dt}$ sera sûrement positive.

D'autre part, en vertu des conditions (94), $\frac{d^2U}{dt^2}$, qui est donné par l'égalité (102), n'est jamais négatif.

U croît donc au delà de toute limite avec t.

Cette conclusion, qui implique contradiction, démontre par l'absurde le théorème énoncé.

La proposition précédente a une application importante :

Pour un corps fluide, M est nul; nous voyons alors qu'un corps fluide où Λ serait négatif, serait en équilibre instable lorsque certaines parties de sa surface seraient maintenues immobiles, tandis que d'autres supporteraient une pression invariable. Par là se trouve étendue aux fluides visqueux une proposition démontrée ailleurs (1) pour les fluides exempts de viscosité.

VII. — Autre conséquence du postulat des petits mouvements : ni l'une ni l'autre des deux vitesses de propagation au sein d'un milieu isotrope ne peut être imaginaire (2).

Le postulat des petits mouvements nous permet d'apporter un complément important à la proposition que nous avons établie au paragraphe IV; nous pourrons, en effet, énoncer et démontrer le théorème que voici :

Considérons un milieu vitreux indéfini dont les régions infiniment éloignées sont maintenues immobiles. L'état initial de ce milieu ne pour-

---

(1) *Sur la stabilité et les petits mouvements des corps fluides*, Chapitre III (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. IX, 1903, p. 233).

(2) *Sur les conditions nécessaires pour la stabilité initiale d'un milieu vitreux* (*Procès-verbaux de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, séance du 2 avril 1903).

rait sûrement pas être un état d'équilibre stable si l'on avait l'une ou l'autre des inégalités

(103) $$\Lambda + 2\mathrm{M} < 0,$$
(104) $$\mathrm{M} < 0.$$

Cette proposition est vraie que le milieu soit dénué de viscosité ou qu'il soit doué de viscosité; elle demeurerait encore vraie si les actions de viscosité, au lieu d'être des résistances passives, étaient des puissances actives.

Dans le cas où le milieu est dénué de viscosité, cette proposition peut s'énoncer autrement; si l'on se reporte aux expressions, données par les égalités (20) et (21), de la vitesse de propagation des vibrations longitudinales et de la vitesse de propagation des perturbations transversales, on peut la formuler ainsi : *L'équilibre initial du milieu serait sûrement instable si l'une ou l'autre des vitesses de propagation y était imaginaire.*

Supposons, en premier lieu, que l'on ait

(103) $$\Lambda + 2\mathrm{M} < 0.$$

Posons

(105) $$\Theta = \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial c}.$$

En vertu des égalités (90), cette grandeur vérifiera, en tout point du milieu, l'équation aux dérivées partielles

(106) $$(\Lambda + 2\mathrm{M})\,\Delta\Theta + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Theta - \rho_0\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2} = 0.$$

Considérons l'expression

(107) $$\mathrm{U} = -(\Lambda + 2\mathrm{M})\int(\Delta\Theta)^2\,d\varpi + \rho_0\int\left[\left(\frac{\partial\Theta'}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta'}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta'}{\partial c}\right)^2\right]d\varpi,$$

où

$$\Theta' = \frac{\partial\Theta}{\partial t}, \qquad d\varpi = da\,db\,dc.$$

et que la seconde intégrale soit inférieure en valeur absolue à la première.

Dès lors, la valeur initiale de $\frac{dU}{dt}$ sera sûrement positive.

D'autre part, en vertu des conditions (94), $\frac{d^2U}{dt^2}$, qui est donné par l'égalité (102), n'est jamais négatif.

U croît donc au delà de toute limite avec t.

Cette conclusion, qui implique contradiction, démontre par l'absurde le théorème énoncé.

La proposition précédente a une application importante :

Pour un corps fluide, M est nul; nous voyons alors qu'un corps fluide où Λ serait négatif, serait en équilibre instable lorsque certaines parties de sa surface seraient maintenues immobiles, tandis que d'autres supporteraient une pression invariable. Par là se trouve étendue aux fluides visqueux une proposition démontrée ailleurs (¹) pour les fluides exempts de viscosité.

VII. — Autre conséquence du postulat des petits mouvements : ni l'une ni l'autre des deux vitesses de propagation au sein d'un milieu isotrope ne peut être imaginaire (²).

Le postulat des petits mouvements nous permet d'apporter un complément important à la proposition que nous avons établie au paragraphe IV; nous pourrons, en effet, énoncer et démontrer le théorème que voici :

Considérons un milieu vitreux indéfini dont les régions infiniment éloignées sont maintenues immobiles. L'état initial de ce milieu ne pour-

---

(¹) *Sur la stabilité et les petits mouvements des corps fluides*, Chapitre III (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5ᵉ série, t. IX, 1903, p. 233).

(²) *Sur les conditions nécessaires pour la stabilité initiale d'un milieu vitreux* (*Procès-verbaux de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, séance du 2 avril 1903).

rait sûrement pas être un état d'équilibre stable si l'on avait l'une ou l'autre des inégalités

(103) $$\Lambda + 2\mathrm{M} < 0,$$

(104) $$\mathrm{M} < 0.$$

Cette proposition est vraie que le milieu soit dénué de viscosité ou qu'il soit doué de viscosité ; elle demeurerait encore vraie si les actions de viscosité, au lieu d'être des résistances passives, étaient des puissances actives.

Dans le cas où le milieu est dénué de viscosité, cette proposition peut s'énoncer autrement; si l'on se reporte aux expressions, données par les égalités (20) et (21), de la vitesse de propagation des vibrations longitudinales et de la vitesse de propagation des perturbations transversales, on peut la formuler ainsi : *L'équilibre initial du milieu serait sûrement instable si l'une ou l'autre des vitesses de propagation y était imaginaire.*

Supposons, en premier lieu, que l'on ait

(103) $$\Lambda + 2\mathrm{M} < 0.$$

Posons

(105) $$\Theta = \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial c}.$$

En vertu des égalités (90), cette grandeur vérifiera, en tout point du milieu, l'équation aux dérivées partielles

(106) $$(\Lambda + 2\mathrm{M})\Delta\Theta + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Theta - \rho_0 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = 0.$$

Considérons l'expression

(107) $$\mathrm{U} = -(\Lambda + 2\mathrm{M})\int (\Delta\Theta)^2 d\varpi + \rho_0 \int \left[\left(\frac{\partial \Theta'}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta'}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta'}{\partial c}\right)^2\right] d\varpi,$$

où

$$\Theta' = \frac{\partial \Theta}{\partial t}, \qquad d\varpi = da\, db\, dc.$$

Des calculs tout semblables à ceux qui, des égalités (55) et (60), tirent les égalités (56) et (63), nous donneront

$$(108)\qquad \frac{dU}{dt} = -4(\Lambda + 2M)\int \Delta\Theta\,\Delta\Theta'\,d\varpi - 2(\lambda + 2\mu)\int (\Delta\Theta')^2\,d\varpi.$$

Puis, des calculs semblables à ceux qui ont fourni les égalités (59) et (65) nous permettront d'écrire

$$(109)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2U}{dt^2} = {} & 4(\Lambda + 2M)\int (\Delta\Theta')^2\,d\varpi \\ & + \frac{4}{\rho_0}\int \Bigg\{ \left[(\Lambda + 2M)\frac{\partial\,\Delta\Theta}{\partial a} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\,\Delta\Theta'}{\partial a}\right]^2 \\ & \qquad + \left[(\Lambda + 2M)\frac{\partial\,\Delta\Theta}{\partial b} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\,\Delta\Theta'}{\partial b}\right]^2 \\ & \qquad + \left[(\Lambda + 2M)\frac{\partial\,\Delta\Theta}{\partial c} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\,\Delta\Theta'}{\partial c}\right]^2 \Bigg\} d\varpi. \end{aligned}$$

Ces préliminaires posés, supposons que l'état d'équilibre initial du système soit un état d'équilibre stable. On pourrait visiblement imposer aux valeurs absolues initiales de

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \frac{\partial\zeta}{\partial t},\quad \frac{\partial\eta}{\partial t},\quad \frac{\partial\zeta}{\partial t},$$

qui sont les mêmes que les valeurs absolues initiales de

$$u,\quad v,\quad w,\quad \frac{\partial u}{\partial t},\quad \frac{\partial v}{\partial t},\quad \frac{\partial w}{\partial t},$$

des limites telles que U ne surpasse à aucun instant une certaine valeur positive donnée d'avance V.

D'autre part, nous pourrons toujours, à cet instant initial, prendre

$$\frac{\partial u}{\varphi t} = K^2 u,\qquad \frac{\partial v}{\partial t} = K^2 v,\qquad \frac{\partial w}{\partial t} = K^2 w,$$

K^2 étant une quantité indépendante de a, b, c. Nous aurons alors,

selon l'égalité (108),

$$(110) \qquad \left(\frac{\partial U}{dt}\right)_0 = -4K^2(\Lambda + 2M)\int(\Delta\Theta_0)^2 d\varpi - 2K^4(\lambda + 2\mu)\int(\Delta\Theta_0)^2 d\varpi.$$

Nous pourrons toujours, sans que les valeurs absolues initiales de u, v, w, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ transgressent les limites supérieures qui leur sont prescrites, faire en sorte que $\Delta\Theta_0$ ne soit pas nul dans tout l'espace et prendre, en outre, K^2 assez petit pour que le second membre de l'égalité (110) ait le signe de son premier terme, qui est positif selon l'inégalité (103).

$\left(\frac{dU}{dt}\right)_0$ serait alors sûrement positif; comme selon l'égalité (109), $\frac{d^2U}{dt^2}$ ne peut être nul à aucun moment, U croîtrait au delà de toute limite avec t et ne pourrait demeurer inférieur à V. La contradiction à laquelle nous aboutissons démontre le théorème énoncé.

Imaginons maintenant que l'on ait l'inégalité

$$(104) \qquad M < 0.$$

Posons, par exemple,

$$(111) \qquad \Omega_1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Selon les égalités (90), nous aurons, en tout point du milieu et à tout instant,

$$(112) \qquad M\,\Delta\Omega_1 + \mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Omega_1 - \rho_0\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial t^2} = 0.$$

Considérons alors l'expression

$$(113) \qquad U = -M\int(\Delta\Omega_1)^2 d\varpi + \rho_0\int\left[\left(\frac{\partial\Omega_1'}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega_1'}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega_1'}{\partial c}\right)^2\right] d\varpi,$$

où

$$\Omega'_1 = \frac{\partial \Omega_1}{\partial t}.$$

Des calculs semblables à ceux qui, des égalités (67) et (70), tirent les égalités (68) et (71) permettent d'écrire

$$(114) \qquad \frac{dU}{dt} = -4M\int \Delta\Omega_1\, \Delta\Omega'_1\, d\varpi - 2\mu\int (\Delta\Omega'_1)^2\, d\varpi.$$

Puis, de même qu'on a obtenu les égalités (69) et (72), on obtiendra l'égalité

$$(115) \qquad \begin{aligned} \frac{d^2U}{dt^2} = &-4M\int (\Delta\Omega'_1)^2\, d\varpi \\ &+ \frac{4}{\rho_0}\int \Big[\left(M\frac{\partial\,\Delta\Omega_1}{\partial a} + \mu\frac{\partial\,\Delta\Omega'_1}{\partial a}\right)^2 \\ &\qquad + \left(M\frac{\partial\,\Delta\Omega_1}{\partial b} + \mu\frac{\partial\,\Delta\Omega'_1}{\partial b}\right)^2 \\ &\qquad + \left(M\frac{\partial\,\Delta\Omega_1}{\partial c} + \mu\frac{\partial\,\Delta\Omega'_1}{\partial c}\right)^2 \Big]\, d\varpi. \end{aligned}$$

En raisonnant sur les égalités (113), (114) et (115) comme nous avons raisonné sur les égalités (107), (108) et (109), nous prouverons que l'état d'équilibre initial d'un milieu indéfini où l'inégalité (104) est vérifiée ne saurait être un état d'équilibre stable.

CHAPITRE III.

LE DÉPLACEMENT DE L'ÉQUILIBRE.

I. — Du déplacement de l'équilibre en général.

Considérons d'abord un système défini par un certain nombre de variables normales $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, hors la température absolue T. Supposons qu'à une certaine température T, le système prenne un état d'équilibre lorsqu'on le soumet aux actions extérieures A, B, ..., L, et que cet état d'équilibre varie d'une manière continue lorsque, sans faire varier la température T, on fait varier les valeurs A, B, ..., L des actions extérieures. Si les actions A, B, ..., L éprouvent des variations infiniment petites $d\text{A}, d\text{B}, \ldots, d\text{L}$, que nous nommerons des *actions perturbatrices,* les valeurs des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ qui conviennent à l'équilibre éprouvent des variations $d\alpha, d\beta, \ldots, d\lambda$, que nous nommerons des *perturbations;* l'expression

$$d\text{A}\,d\alpha + d\text{B}\,d\beta + \ldots + d\text{L}\,d\lambda$$

sera nommée le *travail perturbateur isothermique.*

Dire qu'un travail perturbateur est positif, c'est dire, sous une forme mathématique précise, que la perturbation se produit dans le sens vers lequel tendent les actions perturbatrices. Il est clair que *les systèmes que la nature nous offre seront tels, en général, que tout travail perturbateur isothermique, accompli à partir d'un état d'équilibre, soit positif.* C'est ce que nous exprimerons en disant qu'ils sont soumis à la *loi du déplacement isothermique de l'équilibre.*

Soit $\mathcal{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \text{T})$ le potentiel interne du système; pour que ce système soit soumis à la loi du déplacement isothermique de l'équilibre, il faut et il suffit (¹) qu'à partir de l'état d'équilibre, toute

(¹) *Traité élémentaire de Mécanique chimique fondée sur la Thermodynamique,* Livre I, Chapitre VIII (t. I, p. 137).

valeur de la variation seconde

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2}(d\alpha)^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2}(d\beta)^2 + \ldots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda^2}(d\lambda)^2 + 2\sum \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu\, \partial \nu} d\mu\, d\nu$$

soit essentiellement positive. Il en résulte, selon le criterium de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet, qu'*un état d'équilibre soumis à la loi du déplacement isothermique est assurément stable si l'on maintient invariables la température* T *et les actions extérieures* A, B, ..., L.

A cette loi du déplacement isothermique de l'équilibre se rattachent beaucoup d'autres considérations que nous avons développées ailleurs (¹); nous serons amené ici à étendre quelques-unes de ces considérations aux milieux élastiques.

II. — Du déplacement isothermique de l'équilibre pour un milieu élastique affecté d'une déformation homogène.

Supposons que les composantes ξ, η, ζ de l'élongation soient, pour chacun des points matériels du milieu, des fonctions linéaires des coordonnées initiales a, b, c de ce point; en d'autres termes, supposons que l'on ait

$$(116)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + a_{11}a + a_{12}b + a_{13}c, \\ \eta &= \eta_0 + a_{21}a + a_{22}b + a_{23}c, \\ \zeta &= \zeta_0 + a_{31}a + a_{32}b + a_{33}c, \end{aligned}\right.$$

ξ_0, η_0, ζ_0 et les a_{ij} étant douze quantités indépendantes de a, b, c. Selon les égalités (23), nous aurons

$$(117)\qquad \left\{\begin{aligned} e_1 &= a_{11} + \tfrac{1}{2}(a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2), \\ e_2 &= a_{22} + \tfrac{1}{2}(a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2), \\ e_3 &= a_{33} + \tfrac{1}{2}(a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2), \\ g_1 &= a_{23} + a_{32} + a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33}, \\ g_2 &= a_{31} + a_{13} + a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31}, \\ g_3 &= a_{12} + a_{21} + a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32}. \end{aligned}\right.$$

Les six quantités e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3 ont ainsi des valeurs indépendantes de a, b, c, ce qu'on exprime en disant que *la déformation du milieu est homogène*.

Supposons que les quantités ξ_0, η_0, ζ_0 et les a_{ij} éprouvent des va-

(¹) *Ibid.*, Livre I, Chapitres VIII, IX, X, XI.

riations $\delta\xi_0$, $\delta\eta_0$, $\delta\zeta_0$, δa_{ij} indépendantes de a, b, c; nous aurons, selon les égalités (116),

$$(118)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\xi &= \delta\xi_0 + a\,\delta a_{11} + b\,\delta a_{12} + c\,\delta a_{13},\\ \delta\eta &= \delta\eta_0 + a\,\delta a_{21} + b\,\delta a_{22} + c\,\delta a_{23},\\ \delta\zeta &= \delta\zeta_0 + a\,\delta a_{31} + b\,\delta a_{32} + c\,\delta a_{33}, \end{aligned}\right.$$

tandis que les égalités (117) donnent

$$(119)\quad \left\{\begin{aligned} \delta e_1 &= (1 + a_{11})\,\delta a_{11} + a_{21}\,\delta a_{21} + a_{31}\,\delta a_{31},\\ \delta e_2 &= a_{12}\,\delta a_{12} + (1 + a_{22})\,\delta a_{22} + a_{32}\,\delta a_{32},\\ \delta e_3 &= a_{13}\,\delta a_{13} + a_{23}\,\delta a_{23} + (1 + a_{33})\,\delta a_{33},\\ \delta g_1 &= a_{12}\,\delta a_{13} + (1 + a_{22})\,\delta a_{23} + a_{32}\,\delta a_{33}\\ &\quad + a_{13}\,\delta a_{12} + a_{23}\,\delta a_{22} + (1 + a_{33})\,\delta a_{32},\\ \delta g_2 &= a_{13}\,\delta a_{11} + a_{23}\,\delta a_{21} + (1 + a_{33})\,\delta a_{31}\\ &\quad + (1 + a_{11})\,\delta a_{13} + a_{21}\,\delta a_{23} + a_{31}\,\delta a_{33}\\ \delta g_3 &= (1 + a_{11})\,\delta a_{12} + a_{21}\,\delta a_{22} + a_{31}\,\delta a_{32}\\ &\quad + a_{12}\,\delta a_{11} + (1 + a_{22})\,\delta a_{21} + a_{32}\,\delta a_{31}. \end{aligned}\right.$$

Ces égalités peuvent encore s'écrire :

$$(120)\quad \left\{\begin{aligned} \delta e_1 &= \frac{\partial x}{\partial a}\,\delta a_{11} + \frac{\partial y}{\partial a}\,\delta a_{21} + \frac{\partial z}{\partial a}\,\delta a_{31},\\ \delta e_2 &= \frac{\partial x}{\partial b}\,\delta a_{12} + \frac{\partial y}{\partial b}\,\delta a_{22} + \frac{\partial z}{\partial b}\,\delta a_{32},\\ \delta e_3 &= \frac{\partial x}{\partial c}\,\delta a_{13} + \frac{\partial y}{\partial c}\,\delta a_{23} + \frac{\partial z}{\partial c}\,\delta a_{33},\\ \delta g_1 &= \frac{\partial x}{\partial b}\,\delta a_{13} + \frac{\partial y}{\partial b}\,\delta a_{23} + \frac{\partial z}{\partial b}\,\delta a_{33}\\ &\quad + \frac{\partial x}{\partial c}\,\delta a_{12} + \frac{\partial y}{\partial c}\,\delta a_{22} + \frac{\partial z}{\partial c}\,\delta a_{32},\\ \delta g_2 &= \frac{\partial x}{\partial c}\,\delta a_{11} + \frac{\partial y}{\partial c}\,\delta a_{21} + \frac{\partial z}{\partial c}\,\delta a_{31}\\ &\quad + \frac{\partial x}{\partial a}\,\delta a_{13} + \frac{\partial y}{\partial a}\,\delta a_{23} + \frac{\partial z}{\partial a}\,\delta a_{33},\\ \delta g_3 &= \frac{\partial x}{\partial a}\,\delta a_{12} + \frac{\partial y}{\partial a}\,\delta a_{22} + \frac{\partial z}{\partial a}\,\delta a_{32}\\ &\quad + \frac{\partial x}{\partial b}\,\delta a_{11} + \frac{\partial y}{\partial b}\,\delta a_{21} + \frac{\partial z}{\partial b}\,\delta a_{31}. \end{aligned}\right.$$

Les égalités (119) donnant pour e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3, des valeurs indépendantes de a, b, c, la déformation est encore homogène après la variation imposée aux ξ_0, η_0, ζ_0, a_{ij}.

Cette même variation donne encore, selon les égalités (118),

$$\delta^2\xi = 0, \qquad \delta^2\eta = 0, \qquad \delta^2\zeta = 0 \tag{121}$$

et, en vertu des égalités (119),

$$\left\{\begin{aligned}
\delta^2 e_1 &= (\delta a_{11})^2 + (\delta a_{21})^2 + (\delta a_{31})^2,\\
\delta^2 e_2 &= (\delta a_{12})^2 + (\delta a_{22})^2 + (\delta a_{32})^2,\\
\delta^2 e_3 &= (\delta a_{13})^2 + (\delta a_{23})^2 + (\delta a_{33})^2,\\
\delta^2 g_1 &= 2(\delta a_{12}\,\delta a_{13} + \delta a_{22}\,\delta a_{23} + \delta a_{32}\,\delta a_{33}),\\
\delta^2 g_2 &= 2(\delta a_{13}\,\delta a_{11} + \delta a_{23}\,\delta a_{21} + \delta a_{33}\,\delta a_{31}),\\
\delta^2 g_3 &= 2(\delta a_{11}\,\delta a_{12} + \delta a_{21}\,\delta a_{22} + \delta a_{31}\,\delta a_{32}).
\end{aligned}\right. \tag{122}$$

Lorsqu'un milieu est, à partir d'un état initial homogène, affecté d'une déformation homogène et que, de plus, la température de ce milieu est maintenue uniforme, on voit sans peine [*Recherches sur l'Élasticité*, première Partie, égalités (62)] que les six quantités N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z sont indépendantes de a, b, c ou, ce qui revient au même, de x, y, z; il en résulte [*Ibid.*, égalités (70)] que les actions extérieures capables de maintenir le système en équilibre se réduisent à des actions purement superficielles. L'élément dS de la surface qui limite le milieu est soumis à une force dont les composantes sont

$$\left\{\begin{aligned}
P_x\,dS &= (N_x\alpha + T_z\beta + T_y\gamma)\,dS,\\
P_y\,dS &= (T_z\alpha + N_y\beta + T_x\gamma)\,dS,\\
P_z\,dS &= (T_y\alpha + T_x\beta + N_z\gamma)\,dS.
\end{aligned}\right. \tag{123}$$

α, β, γ étant les cosinus des angles que la normale à l'élément dS, dirigée vers l'intérieur du milieu, fait avec les axes de coordonnées.

La *perturbation isothermique* dont nous venons d'étudier les propriétés cinématiques transforme l'élément dS en un élément dS'; après cette perturbation, le corps est encore maintenu en équilibre par des actions purement superficielles; l'élément dS' est soumis à

une force dont les composantes sont

$$\begin{aligned}
P'_x\, dS' &= P_x\, dS + \delta(P_x\, dS),\\
P'_y\, dS' &= P_y\, dS + \delta(P_y\, dS),\\
P'_z\, dS' &= P_z\, dS + \delta(P_z\, dS).
\end{aligned}$$

$\delta(P_x\, dS)$, $\delta(P_y\, dS)$, $\delta(P_z\, dS)$ sont les *actions perturbatrices*.

Le *travail perturbateur* a pour expression :

$$d\mathfrak{T} = \int [\delta(P_x\, dS)\,\delta\xi + \delta(P_y\, dS)\,\delta\eta + \delta(P_z\, dS)\,\delta\zeta]$$

ou bien, selon les égalités (123),

$$\begin{aligned}
d\mathfrak{T} = \int \Big\{ &\delta[(N_x\alpha + T_z\beta + T_y\gamma)\, dS]\, d\xi\\
&+ \delta[(T_z\alpha + N_y\beta + T_x\gamma)\, dS]\,\delta\eta\\
&+ \delta[(T_y\alpha + T_x\beta + N_z\gamma)\, dS]\,\delta\zeta \Big\}.
\end{aligned}$$

Si l'on tient compte des égalités (121), cette expression peut s'écrire

$$(124)\quad \begin{aligned}
d\mathfrak{T} = \delta \int [&(N_x\alpha + T_z\beta + T_y\gamma)\,\delta\xi + (T_z\alpha + N_y\beta + T_x\gamma)\,\delta\eta\\
&+ (T_y\alpha + T_x\beta + N_z\gamma)\,\delta\zeta]\, dS.
\end{aligned}$$

Les égalités (45), (61) et (62) de la première Partie des *Recherches sur l'Élasticité* transforment la quantité sous le signe $\int$ et permettent de remplacer l'égalité (124) par l'égalité

$$(125)\quad \begin{aligned}
d\mathfrak{T} = \delta \int \Big(&\frac{\partial\Phi}{\partial e_1}\,\delta e_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial e_2}\,\delta e_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial e_3}\,\delta e_3\\
&\frac{\partial\Phi}{\partial g_1}\,\delta g_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_2}\,\delta g_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_3}\,\delta g_3 \Big)\, dm,
\end{aligned}$$

où l'intégrale s'étend à toutes les masses élémentaires du système.

Les six grandeurs e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3 ayant, ainsi que la température T, la même valeur en tout point du milieu, cette égalité peut

s'écrire, dans le *cas où la perturbation est isothermique*,

$$(126)\quad d\mathfrak{T} = m\left(\frac{\partial\Phi}{\partial e_1}\delta e_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial e_2}\delta e_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial e_3}\delta e_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_1}\delta g_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_2}\delta g_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_3}\delta g_3\right)^{(2)}$$
$$+ m\left(\frac{\partial\Phi}{\partial e_1}\delta^2 e_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial e_2}\delta^2 e_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial e_3}\delta^2 e_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_1}\delta^2 g_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_2}\delta^2 g_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_3}\delta^2 g_3\right),$$

(2) désignant un carré symbolique.

En vertu des égalités (120) et (122), cette égalité (126) devient

$$(127)\quad d\mathfrak{T} = m\left[\frac{\partial\Phi}{\partial e_1}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\delta a_{11} + \frac{\partial y}{\partial a}\delta a_{21} + \frac{\partial z}{\partial a}\delta a_{31}\right) + \ldots\right.$$
$$+ \frac{\partial\Phi}{\partial g_1}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\delta a_{13} + \frac{\partial y}{\partial b}\delta a_{23} + \frac{\partial z}{\partial b}\delta a_{33}\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial x}{\partial c}\delta a_{12} + \frac{\partial y}{\partial c}\delta a_{22} + \frac{\partial z}{\partial c}\delta a_{32}\right) + \ldots\right]^{(2)}$$
$$+ m\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial e_1}[(\delta a_{11})^2 + (\delta a_{21})^2 + (\delta a_{31})^2] + \ldots\right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial\Phi}{\partial g_1}(\delta a_{12}\,\delta a_{13} + \delta a_{22}\,\delta a_{23} + \delta a_{32}\,\delta a_{33}) + \ldots\right\},$$

(2) désignant encore un carré symbolique.

Pour que le système, EXCLUSIVEMENT AFFECTÉ DE DÉFORMATIONS HOMOGÈNES, *vérifie la loi du déplacement isothermique de l'équilibre, il faut et il suffit que le coefficient de m, au second membre de l'égalité* (127), *soit positif quelles que soient les valeurs attribuées aux* δa_{ij}.

III. — Du déplacement isothermique de l'équilibre, en général, en un milieu élastique.

Nous allons maintenant établir la proposition suivante :

Si la condition qui vient d'être énoncée est vérifiée quelles que soient les valeurs de e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3, *le milieu élastique considéré est soumis, en toutes circonstances, à la loi du déplacement isothermique de l'équilibre.*

Supposons, en effet, que notre système soit en équilibre lorsqu'on le soumet à des actions extérieures qui se composent :

1° D'une force $P_x dS$, $P_y dS$, $P_z dS$ appliquée à chaque élément dS de la surface terminale;

2° D'une force $X\,dm$, $Y\,dm$, $Z\,dm$ appliquée à chaque masse élémentaire dm.

Chaque point matériel de coordonnées initiales a, b, c est affecté, en cet état d'équilibre, d'une élongation ξ, η, ζ; la déformation, en ce point, est définie par les égalités (23).

A ce système appliquons une perturbation où les quantités ξ, η, ζ éprouvent des variations premières $\delta\xi$, $\zeta\eta$, $\delta\zeta$, *indépendantes ou non*, et des variations secondes $\delta^2\xi$, $\delta^2\eta$, $\delta^2\zeta$.

Les égalités (23) nous donneront

$$(128)\quad \left\{\begin{aligned} \delta e_1 &= \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial a}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \delta g_1 &= \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial c} + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial c} \\ &\quad + \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial b} + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial b}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right.$$

et aussi

$$(129)\quad \left\{\begin{aligned} \delta^2 g_1 &= 2\left(\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial c} + \frac{\partial\,\delta\eta}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial c} + \frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial c}\right) + D^2 g_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \delta^2 e_1 &= \left(\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial a}\right)^2 + D^2 e_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}\right.$$

avec

$$(130)\quad \left\{\begin{aligned} D^2 e_1 &= \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial\,\delta^2\xi}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial\,\delta^2\eta}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial\,\delta^2\zeta}{\partial a}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ D^2 g_1 &= \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial\,\delta^2\xi}{\partial c} + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial\,\delta^2\eta}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial\,\delta^2\zeta}{\partial c} \\ &\quad + \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial\,\delta^2\xi}{\partial b} + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial\,\delta^2\eta}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial\,\delta^2\zeta}{\partial b}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right.$$

Le travail perturbateur que nous nous proposons d'étudier aura

pour expression

$$d\mathfrak{T} = \int (\delta X\, \delta\xi + \delta Y\, \delta\eta + \delta Z\, \delta\zeta)\, dm + \int [\delta(P_x\, dS)\, \delta\xi + \delta(P_y\, dS)\, \delta\eta + \delta(P_z\, dS)\, \delta\zeta]$$

ou bien encore

$$(131)\quad d\mathfrak{T} = \delta\left[\int (X\,\delta\xi + Y\,\delta\eta + Z\,\delta\zeta)\, dm + \int (P_x\,\delta\xi + P_y\,\delta\eta + P_z\,\delta\zeta)\, dS\right] - \int (X\,\delta^2\xi + Y\,\delta^2\eta + Z\,\delta^2\zeta)\, dm - \int (P_x\,\delta^2\xi + P_y\,\delta^2\eta + P_z\,\delta^2\zeta)\, dS.$$

L'état initial et l'état troublé étant deux états d'équilibre, on tire sans peine, de l'équation même des déplacements virtuels,

$$(132)\quad \delta\left[(X\,\delta\xi + Y\,\delta\eta + Z\,\delta\zeta)\, dm + \int (P_x\,\delta\xi + P_y\,\delta\eta + P_z\,\delta\zeta)\, dS\right] = \delta \int \left(\frac{\partial\Phi}{\partial e_1}\delta e_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial e_2}\delta e_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial e_3}\delta e_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_1}\delta g_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_2}\delta g_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_3}\delta g_3\right) dm,$$

tandis qu'il suffit, dans cette même équation des déplacements virtuels, de remplacer $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ par $\delta^2\xi$, $\delta^2\eta$, $\delta^2\zeta$, et de tenir compte des égalités (130) pour trouver l'égalité

$$(133)\quad \int (X\,\delta^2\xi + Y\,\delta^2\eta + Z\,\delta^2\zeta)\, dm + \int (P_x\,\delta^2\xi + P_y\,\delta^2\eta + P_z\,\delta^2\zeta)\, dS = \int \left(\frac{\partial\Phi}{\partial e_1} D^2 e_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial e_2} D^2 e_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial e_3} D^2 e_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_1} D^2 g_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_2} D^2 g_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_3} D^2 g_3\right) dm.$$

Les égalités (131), (132), (133) et (129) nous donnent sans peine

$$(134)\quad d\mathfrak{T} = \int \Bigg\{ \Bigg[\frac{\partial\Phi}{\partial e_1}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial a}\right) + \ldots + \frac{\partial\Phi}{\partial g_1}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial c} + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial c} + \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial b} + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial b}\right) + \ldots \Bigg]^{(2)} + \frac{\partial\Phi}{\partial e_1}\left[\left(\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial a}\right)^2\right] + \ldots + 2\frac{\partial\Phi}{\partial g_1}\left(\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial c} + \frac{\partial\,\delta\eta}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial c} + \frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial c}\right) + \ldots \Bigg\}\, dm.$$

Or, sous le signe $\int$, le coefficient de dm est ce que devient le coefficient de m au second membre de l'égalité (127), lorsqu'on y fait

$$\begin{array}{lll} \delta a_{11} = \dfrac{\partial\, \delta\xi}{\partial a}, & \delta a_{12} = \dfrac{\partial\, \delta\xi}{\partial b}, & \delta a_{13} = \dfrac{\partial\, \delta\xi}{\partial c}, \\ \delta a_{21} = \dfrac{\partial\, \delta\eta}{\partial a}, & \delta a_{22} = \dfrac{\partial\, \delta\eta}{\partial b}, & \delta a_{23} = \dfrac{\partial\, \delta\eta}{\partial c}, \\ \delta a_{31} = \dfrac{\partial\, \delta\zeta}{\partial a}, & \delta a_{32} = \dfrac{\partial\, \delta\zeta}{\partial b}, & \delta a_{33} = \dfrac{\partial\, \delta\zeta}{\partial c}. \end{array}$$

Il est donc essentiellement positif; il en est de même de $d\mathfrak{G}$, ce qui démontre le théorème énoncé.

IV. — Conséquence, relative à la stabilité de l'équilibre, de la condition établie au § II.

Supposons que le coefficient de m, au second membre de l'égalité (127), soit essentiellement positif. *Si les divers éléments de masse qui forment le corps élastique sont soustraits à l'action de toute force extérieure et si la surface qui limite ce corps est maintenue invariable, ainsi que la température, l'état d'équilibre de ce corps est stable.*

En effet, dans les conditions indiquées, le système admet un potentiel total qui se réduit à son potentiel interne :

$$\mathfrak{F} = \int \Phi(e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3, \mathrm{T})\, dm.$$

La variation première de ce potentiel, en une modification isothermique, est

$$(135)\quad \delta\mathfrak{F} = \int \left(\frac{\partial\Phi}{\partial e_1}\delta e_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial e_2}\delta e_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial e_3}\delta e_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_1}\delta g_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_2}\delta g_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_3}\delta g_3 \right) dm.$$

Cette variation est nulle pour tout système de valeurs de $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ égales à 0 en tout point de la surface qui limite le système.

En vertu des égalités (128), (129) et (135), on peut écrire

$$(136)\quad \delta^2\mathcal{F} = \int\Big\{\Big[\ \frac{\partial\Phi}{\partial e_1}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a}+\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial a}+\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial a}\right)+\ldots$$

$$+\frac{\partial\Phi}{\partial g_1}\Big(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial c}+\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial c}+\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial c}$$

$$+\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial b}+\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial b}+\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial b}\Big)+\ldots\Big]^{(2)}$$

$$+\frac{\partial\Phi}{\partial e_1}\left[\left(\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial a}\right)^2\right]+\ldots$$

$$+2\frac{\partial\Phi}{\partial g_1}\left(\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial c}+\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial c}+\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial c}\right)+\ldots\Big\}\,dm$$

$$+\int\left(\frac{\partial\Phi}{\partial e_1}D^2e_1+\frac{\partial\Phi}{\partial e_2}D^2e_2+\frac{\partial\Phi}{\partial e_3}D^2e_3+\frac{\partial\Phi}{\partial g_1}D^2g_1+\frac{\partial\Phi}{\partial g_2}D^2g_2+\frac{\partial\Phi}{\partial g_3}D^2g_3\right)dm.$$

Au second membre de l'égalité (136), la seconde intégrale est, selon les égalités (130), ce que devient le second membre de l'égalité (135) lorsqu'on y remplace les quantités $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ par les quantités $\delta^2\xi$, $\delta^2\eta$, $\delta^2\zeta$, qui sont également nulles en tout point de la surface qui limite le système; cette intégrale est donc égale à o. Quant à la première intégrale, identique au second membre de l'égalité (134), elle est essentiellement positive.

Donc, en toute modification isothermique virtuelle qui a pour point de départ un état d'équilibre et qui laisse immobiles les points matériels infiniment voisins de la surface limite, $\delta^2\mathcal{F}$ est positif, ce qui démontre le théorème énoncé.

Cette proposition a été tirée de la condition établie au paragraphe II : Le coefficient de m, au second membre de l'égalité (127), est positif quelles que soient les quantités δa_{ij}. Pourrait-on renverser l'ordre de cette déduction et prouver que le coefficient de m, au second membre de l'égalité (127), est sûrement positif, quelles que soient les valeurs attribuées aux quantités δa_{ij}, en prenant comme point de départ la proposition suivante : Si l'on impose au système, à partir d'un état d'équilibre homogène, une modification virtuelle qui laisse invariable la surface limite, il en résulte pour $\delta^2\mathcal{F}$ une valeur positive?

En général, cette marche inverse ne semble pas pouvoir être suivie; dans cette voie, on ne connaît qu'une seule proposition, due

à M. J. Hadamard (¹); encore la démonstration présente-t-elle un point litigieux que nous allons essayer de marquer avec précision.

Voici l'énoncé du théorème de M. Hadamard :

Supposons que les variations

$$(137)\quad \begin{cases} \delta a_{11} = k_1\alpha, & \delta a_{12} = k_1\beta, & \delta a_{13} = k_1\gamma, \\ \delta a_{21} = k_2\alpha, & \delta a_{22} = k_2\beta, & \delta a_{23} = k_2\gamma, \\ \delta a_{31} = k_3\alpha, & \delta a_{32} = k_3\beta, & \delta a_{33} = k_3\gamma, \end{cases}$$

où α, β, γ *sont les cosinus des angles qu'une certaine direction fait avec les axes de coordonnées, rendent négatif le coefficient de m au second membre de l'égalité* (127); *on pourra attribuer à* $\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta$ *des valeurs telles que le second membre de l'égalité* (136) *ou, ce qui revient au même, la première intégrale de ce second membre soit une quantité négative.*

Au sein du milieu pris dans son état initial a, b, c, et à distance finie de la surface qui le limite, traçons une aire plane Σ dont la normale fasse avec les axes des coordonnées des angles ayant pour cosinus α, β, γ. Par le contour de cette aire, élevons-lui des normales qui, toutes, aient une même longueur h; elles formeront la surface latérale d'un cylindre C ayant pour base l'aire Σ et une seconde aire Σ', égale et parallèle à la précédente. Donnons aux divers points du milieu des déplacements ξ, η, ζ qui engendrent la déformation homogène $e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3$. Ensuite, définissons les quantités $\delta\zeta$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ par les conditions suivantes :

1° Pour chacun des points matériels qui, dans l'état initial, étaient contenus à l'intérieur du cylindre C, on a

$$(138)\quad \begin{cases} \delta\xi = k_1(\alpha a + \beta b + \gamma c) + K_1, \\ \delta\eta = k_2(\alpha a + \beta b + \gamma c) + K_2, \\ \delta\zeta = k_3(\alpha a + \beta b + \gamma c) + K_3, \end{cases}$$

K_1, K_2, K_3 étant trois quantités indépendantes de a, b, c. Comme pour tous les points matériels qui, dans l'état initial, formaient l'aire Σ, la

(¹) J. HADAMARD, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique*, n° 270, p. 253; Paris, 1903.

somme $(\alpha a + \beta b + \gamma c)$ a la même valeur, on pourra disposer de K_1, K_2, K_3 de telle sorte que, pour ces points, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ soient égaux à o. Dès lors, il est clair que, pour tous les points matériels contenus initialement à l'intérieur du cylindre C, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ seront des quantités infiniment petites avec h et au moins de l'ordre de h, tandis que les quantités $\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a}$, $\cdots$ auront les valeurs, indépendantes de h,

$$(139)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial\,\delta\xi}{\partial a} = k_1\alpha, & \dfrac{\partial\,\delta\xi}{\partial b} = k_1\beta, & \dfrac{\partial\,\delta\xi}{\partial c} = k_1\gamma, \\ \dfrac{\partial\,\delta\eta}{\partial a} = k_2\alpha, & \dfrac{\partial\,\delta\eta}{\partial b} = k_2\beta, & \dfrac{\partial\,\delta\eta}{\partial c} = k_2\gamma, \\ \dfrac{\partial\,\delta\zeta}{\partial a} = k_3\alpha, & \dfrac{\partial\,\delta\zeta}{\partial b} = k_3\beta, & \dfrac{\partial\,\delta\zeta}{\partial c} = k_3\gamma. \end{array}\right.$$

2° Pour les points matériels non compris initialement à l'intérieur de C, nous supposerons que $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ ont des valeurs nulles le long de la surface qui limite le système, se raccordant d'une manière continue, le long des parois du cylindre C, aux valeurs que $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ prennent pour les points intérieurs à ce cylindre, enfin infiniment petites avec h. Nous supposerons, en outre, que l'on peut choisir ces quantités de telle sorte que, pour tous les points matériels non initialement compris à l'intérieur du cylindre C, les quantités $\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a}$, $\cdots$ soient infiniment petites du même ordre que h.

Cette dernière supposition est elle légitime? Prenons un point M à la surface du cylindre C. Lorsqu'on tend vers ce point en venant de l'extérieur du cylindre, $\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a}$ tend vers une limite que nous désignerons par $\left(\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a}\right)_e$, tandis que si l'on tend vers le même point en venant de l'intérieur du cylindre, $\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a}$ a pour limite $k_1\alpha$. Soit θ une direction quelconque, menée par le point M tangentiellement à la surface du cylindre C. Les valeurs extérieures et intérieures de $\delta\xi$ devant se raccorder sans discontinuité le long de cette surface, on devra avoir

$$\left(\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a}\right)_e \cos(\theta, a) + \left(\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial b}\right)_e \cos(\theta, b) + \left(\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial c}\right)_e \cos(\theta, c)$$
$$= k_1[\alpha\cos(\theta, a) + \beta\cos(\theta, b) + \gamma\cos(\theta, c)],$$

et, semblablement,

$$\left(\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial a}\right)_e \cos(\theta, a) + \left(\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial b}\right)_e \cos(\theta, b) + \left(\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial c}\right)_e \cos(\theta, c)$$
$$= k_2[\alpha\cos(\theta, a) + \beta\cos(\theta, b) + \gamma\cos(\theta, c)],$$
$$\left(\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial a}\right)_e \cos(\theta, a) + \left(\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial b}\right)_e \cos(\theta, b) + \left(\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial c}\right)_e \cos(\theta, c)$$
$$= k_3[\alpha\cos(\theta, a) + \beta\cos(\theta, b) + \gamma\cos(\theta, c)].$$

En tout point des bases Σ et Σ' du cylindre C, on a

$$\alpha\cos(\theta, a) + \beta\cos(\theta, b) + \gamma\cos(\theta, c) = 0;$$

il n'est donc pas absurde de supposer que les quantités $\left(\frac{\partial\,\delta\xi}{ba}\right)_e, \cdots$ sont infiniment petites avec h; mais il n'en est plus de même le long de la surface latérale du cylindre C. Le long de cette surface,

$$\alpha\cos(\theta, a) + \beta\cos(\theta, b) + \gamma\cos(\theta, c)$$

n'est plus, en général, ni nul, ni infiniment petit avec h; si, par exemple, on prend pour direction θ la direction de la génératrice, cette quantité est égale à 1.

Il existe donc certainement à l'extérieur du cylindre C et au voisinage de sa surface latérale une région dans laquelle les quantités $\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a}, \cdots$ ne sont pas, en général, infiniment petites de l'ordre de h, mais demeurent finies lorsque h tend vers o. *Nous admettrons que cette région environne la surface latérale du cylindre d'une sorte d'anneau dont la section a toutes ses dimensions de l'ordre de h, en sorte que le volume de cet anneau soit infiniment petit de l'ordre de h^2*. Cette supposition que l'intuition fait apparaître comme vraisemblable, mais qu'il est malaisé de justifier par un raisonnement rigoureux, permet seule de poursuivre la démonstration de M. Hadamard.

Cette démonstration, d'ailleurs, s'achève immédiatement; au second membre de l'égalité (136), la première intégrale se décompose en deux autres; l'une, étendue aux masses qui n'étaient pas initialement comprises dans le cylindre C, est infiniment petite de l'ordre de h^2; l'autre s'étend à la masse que contenait initialement le

cylindre C; elle est le produit de cette masse, qui est un infiniment petit de l'ordre de h, par un coefficient indépendant de h; ce coefficient est ce que devient le coefficient m, au second membre de l'égalité (127) par les valeurs (137) des δa_{ij}; il est donc négatif par hypothèse. Or, on peut assurément prendre h assez petit pour que cette seconde partie de l'intégrale surpasse la première partie en valeur absolue, partant pour que l'intégrale soit négative.

V. — Du déplacement isentropique de l'équilibre.

Dans tout ce que nous avons dit jusqu'ici, au cours du présent Chapitre, nous avons supposé la température du système maintenue uniforme et invariable; à cette restriction nous allons maintenant en substituer une autre. Nous supposerons toujours la température uniforme en l'état d'équilibre dont nous étudions le déplacement ou la stabilité; mais, à partir de cet état, nous supposerons que la température peut varier en même temps que la déformation, de telle sorte que l'entropie de chaque masse élémentaire garde une valeur invariable.

L'entropie de la masse dm a pour valeur

$$-\frac{1}{E}\frac{\partial\Phi}{\partial T}dm,$$

E étant l'équivalent mécanique de la chaleur; pour que cette quantité demeure invariable, il faut et il suffit que $\frac{\partial\Phi}{\partial T}$ demeure invariable ou, en d'autres termes, que l'on ait

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial T^2}\delta T+\frac{\partial^2\Phi}{\partial e_1\,\partial T}\delta e_1+\ldots+\frac{\partial^2\Phi}{\partial g_1\,\partial T}\delta g_1+\ldots=0.$$

Si l'on désigne par c la chaleur spécifique normale de l'élément dm, on a

$$c=-\frac{T}{E}\frac{\partial^2\Phi}{\partial T^2},$$

en sorte que l'égalité précédente devient

$$(140)\qquad \delta T = \frac{T}{Ec}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial e_1\,\partial T}\delta e_1 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial e_2\,\partial T}\delta e_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial e_3\,\partial T}\delta e_3 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial g_1\,\partial T}\delta g_1 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial g_2\,\partial T}\delta g_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial g_3\,\partial T}\delta g_3\right).$$

Cette égalité posée, revenons au problème traité au paragraphe II. Supposons que la variation imposée à la déformation homogène du système soit accompagnée d'une variation dans la valeur uniforme de la température, et cela de telle sorte que l'entropie de chaque masse élémentaire demeure invariable. Le *travail perturbateur isentropique* $d\mathfrak{G}'$ pourra encore s'exprimer par des formules semblables aux formules (124) ou (125), qui donnent le *travail perturbateur isothermique* $d\mathfrak{G}$; mais, pour calculer $d\mathfrak{G}'$, on devra, au second membre de l'égalité (126), ajouter

$$m\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial e_1\,\partial T}\delta e_1 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial e_2\,\partial T}\delta e_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial e_3\,\partial T}\delta e_3 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial g_1\,\partial T}\delta g_1 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial g_2\,\partial T}\delta g_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial g_3\,\partial T}\delta g_3\right)\delta T.$$

Si l'on transforme cette expression au moyen de l'égalité (140), on trouve

$$(141)\qquad d\mathfrak{G}' - d\mathfrak{G} = m\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial e_1\,\partial T}\delta e_1 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial e_2\,\partial T}\delta e_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial e_3\,\partial T}\delta e_3 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial g_1\,\partial T}\delta g_1 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial g_2\,\partial T}\delta g_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial g_3\,\partial T}\delta g_3\right)^2.$$

Si $d\mathfrak{G}$ est positif, $d\mathfrak{G}'$ l'est *a fortiori*. *Tout milieu élastique dont les déformations homogènes vérifient la loi du déplacement isothermique de l'équilibre, est soumis* a fortiori *à la loi du déplacement isentropique.*

On démontrerait sans peine :

1° Que la loi du déplacement isentropique de l'équilibre est encore vérifiée par notre système à partir d'un état d'équilibre où le milieu est soumis à des actions solides ou superficielles quelconques;

2° Que le système, soumis à des actions purement superficielles, est en équilibre stable lorsqu'on maintient invariables la surface qui le limite et l'entropie de chacune des masses élémentaires qui le composent.

VI. — Application des considérations précédentes à un milieu élastique très peu déformé.

Nous allons appliquer à un milieu élastique très peu déformé les considérations qui ont été développées aux quatre derniers paragraphes. Pour un tel milieu, on doit substituer aux quantités e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3, définies par les égalités (23), les quantités ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 définies par les égalités (2). Les trois quantités $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial b}, \frac{\partial z}{\partial c}$ sont infiniment voisines de 1, tandis que les autres dérivées partielles de x, y, z par rapport à a, b, c sont infiniment voisines de o. Dès lors, en exprimant que le coefficient de m, au second membre de l'égalité (127), est essentiellement positif, nous arriverons à cette proposition :

Quels que soient ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3, *et quelles que soient les valeurs attribuées aux quantités* δa_{ij}, *on a l'inégalité*

$$(142)\quad \begin{aligned} \Big[& \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}\delta a_{11} + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}\delta a_{22} + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}\delta a_{33} \\ & + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}(\delta a_{23}+\delta a_{32}) + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2}(\delta a_{31}+\delta a_{13}) + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3}(\delta a_{12}+\delta a_{21})\Big]^{(2)} \\ & + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}[(\delta a_{11})^2 + (\delta a_{21})^2 + (\delta a_{31})^2] + \ldots \\ & + 2\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}(\delta a_{12}\,\delta a_{13} + \delta a_{22}\,\delta a_{23} + \delta a_{32}\,\delta a_{33}) + \ldots\ldots\ldots > 0. \end{aligned}$$

C'est la condition nécessaire et suffisante pour que notre milieu élastique, soumis à des forces quelconques sollicitant les éléments de la surface qui le limite ou les éléments de la masse qui le forme, soit soumis à la loi du déplacement isothermique de l'équilibre. Cette condition suffit en même temps pour que ce corps élastique se conforme à la loi du déplacement isentropique de l'équilibre.

En outre, si le milieu, soumis à des actions purement superficielles et porté à une température uniforme, est en équilibre dans un état de déformation homogène, la condition (142) nous assure que cet état

demeure stable lorsqu'on maintient immobile la surface qui limite ce milieu et, en outre, lorsqu'on maintient invariable soit la température du système, soit l'entropie de chaque élément.

Supposons, comme au Chapitre I, Paragraphe I, que l'état initial du milieu soit l'état d'équilibre qu'il prend à la température T, sous une pression initiale Π_0, nulle ou *positive*. A cette même température T, nous aurons, en vertu des égalités (4) et (7),

$$\begin{aligned}\Phi = \quad & \varphi_0(\rho_0, T) - \frac{\Pi_0}{\rho_0}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ & + \varphi_2(\rho_0, T, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3),\end{aligned}$$

φ_2 étant une forme quadratique en ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3.

L'inégalité (142) devient

$$(143) \quad \begin{aligned} & \Big[\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varepsilon_1} \delta a_{11} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varepsilon_2} \delta a_{22} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varepsilon_3} \delta a_{33} \\ & \quad + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_1}(\delta a_{23} + \delta a_{32}) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_2}(\delta a_{31} + \delta a_{13}) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_3}(\delta a_{12} + \delta a_{21}) \Big]^{(2)} \\ & \quad - \frac{\Pi_0}{\rho_0} [(\delta a_{11})^2 + (\delta a_{21})^2 + (\delta a_{31})^2 + (\delta a_{12})^2 + (\delta a_{22})^2 + (\delta a_{32})^2 \\ & \qquad + (\delta a_{13})^2 + (\delta a_{23})^2 + (\delta a_{33})^2] > 0, \end{aligned}$$

(2) désignant un carré symbolique. Cette inégalité, où Π_0 est positif ou nul, exige que ce carré symbolique soit positif. Si l'on observe que les quantités δa_{ij} ont des valeurs entièrement arbitraires, on voit qu'il revient au même de dire que *la grandeur*

$$\varphi_2(\rho_0, T, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

est une forme quadratique définie positive des ε_i, γ_i.

Nous étions déjà parvenus à cette condition au Chapitre I, Paragraphe I, en imposant au milieu élastique certaines conditions de stabilité; mais :

1° Nous n'avions pu regarder cette condition comme nécessaire qu'en supposant exacte la réciproque du théorème de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet.

2° Nous avions dû nous limiter au cas où l'état initial est l'état d'équilibre pris par le système sous une pression nulle.

Il y a donc avantage à prendre pour hypothèse fondamentale non pas certaines suppositions touchant la stabilité, mais la loi du déplacement isothermique de l'équilibre. Cette loi entraîne d'ailleurs comme conséquences les stabilités que nous aurions postulées.

Les considérations que nous venons de développer se rattachent à une généralisation du théorème de Reech, généralisation qui a été indiquée par M. W. Voigt (¹) et dont nous aurons besoin dans ce qui va suivre; disons quelques mots de cette généralisation.

Dans le cas où l'état initial du milieu est l'état d'équilibre pris, à la température T, sous une pression uniforme Π_0, nulle ou positive, le carré symbolique qui figure au premier membre de l'inégalité (143) est positif quels que soient les δa_{ij}; si, en outre, Π_0 est nul et si l'on pose

$$(144)\quad \begin{cases} \delta a_{11} = E_1, & \delta a_{22} = E_2 & \delta a_{33} = E_3, \\ \delta a_{23} + \delta a_{32} = G_1, & \delta a_{31} + \delta a_{13} = G_2, & \delta a_{12} + \delta a_{21} = G_3, \end{cases}$$

cas auquel E_1, E_2, E_3, G_1, G_2, G_3 sont six quantités arbitraires, la condition ainsi obtenue peut s'écrire

$$(145)\quad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}E_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}E_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}E_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}G_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2}G_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3}G_3\right)^{(2)} > 0,$$

(2) désignant un carré symbolique.

Hors des hypothèses particulières que nous venons de préciser, nous ne connaîtrons pas le signe du premier membre de (145); mais ce premier membre sera susceptible d'une interprétation simple.

Quelles que soient les quantités E_1, E_2, E_3, G_1, G_2, G_3, on peut toujours, au moyen des égalités (144), déterminer des valeurs correspon-

(¹) W. VOIGT, *Thermodynamik*, Iᵉʳ Band, p. 332-333, formules (198) et (199), Leipzig, 1903. *Voir* aussi P. DUHEM, *Sur une généralisation du théorème de Reech* (*Procès-verbaux des séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, séance du 2 avril 1903).

dantes des δa_{ij}. Ces valeurs nous donneront

$$(146) \qquad \begin{cases} \delta\varepsilon_1 = E_1, & \delta\varepsilon_2 = E_2, & \delta\varepsilon_3 = E_3, \\ \delta\gamma_1 = G_1, & \delta\gamma_2 = G_2, & \delta\gamma_3 = G_3 \end{cases}$$

et détermineront une perturbation homogène de la déformation infiniment petite homogène qui affectait notre milieu.

Imaginons que cette perturbation soit accomplie sans variation de température; elle correspondra à des *variations isothermiques*

$$\delta N_x, \quad \delta N_y, \quad \delta N_z, \quad \delta T_x, \quad \delta T_y, \quad \delta T_z$$

des quantités N_i, T_i. Selon les égalités (3), nous aurons

$$(147) \quad \begin{cases} \delta N_x = -\rho_0\left(\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1^2} E_1 + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial\varepsilon_2} E_2 + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial\varepsilon_3} E_3 + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial\gamma_1} G_1 + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial\gamma_2} G_2 + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial\gamma_3} G_3\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \delta T_x = -\rho_0\left(\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial\varepsilon_1} E_1 + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial\varepsilon_2} E_2 + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial\varepsilon_3} E_3 + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1^2} G_1 + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial\gamma_2} G_2 + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial\gamma_3} G_3\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

On voit alors que l'on a

$$(148) \quad \begin{aligned} & E_1\,\delta N_x + E_2\,\delta N_y + E_3\,\delta N_z + G_1\,\delta T_x + G_2\,\delta T_y + G_3\,\delta T_z \\ & = -\rho_0\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1} E_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3} E_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3} E_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1} G_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2} G_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3} G_3\right)^{(2)}. \end{aligned}$$

Dans les conditions particulières où l'inégalité (145) est assurée, le premier membre de l'égalité (148) est négatif.

Si la perturbation (146), au lieu d'être isothermique, était accompagnée d'une variation homogène δT de la température, il faudrait, aux seconds membres des égalités (147), ajouter respectivement

$$-\rho_0 \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial T}\delta T, \quad \dots, \qquad -\rho_0\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial T}\delta T, \quad \dots.$$

En particulier, si la modification était isentropique, δT serait donné par l'égalité (140), où les quantités e_i, g_i, devraient être remplacées par les quantités ε_i, γ_i, et où l'on aurait à tenir compte des éga-

lités (146); dès lors, les grandeurs N_i, T_i subiraient des *variations isentropiques*

$$\delta' N_x, \quad \delta' N_y, \quad \delta' N_z, \quad \delta' T_x, \quad \delta' T_y, \quad \delta' T_z$$

données par les égalités

$$(149) \begin{cases} \delta' N_x = \delta N_x - \frac{\rho_0 T}{E c}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_1 \partial T} E_1 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_2 \partial T} E_2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_3 \partial T} E_3 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial T} G_1 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_2 \partial T} G_2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_3 \partial T} G_3\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_1 \partial T}, \\ \dots\dots\dots, \\ \delta' T_x = \delta T_x - \frac{\rho_0 T}{E c}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_1 \partial T} E_1 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_2 \partial T} E_2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_3 \partial T} E_3 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial T} G_1 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_2 \partial T} G_2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_3 \partial T} G_3\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial T}, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Ces égalités (149) donnent

$$(150) \quad \begin{aligned} & E_1 \delta' N_x + E_2 \delta' N_y + E_3 \delta' N_z + G_1 \delta' T_x + G_2 \delta' T_y + G_3 \delta' T_z \\ & = E_1 \delta N_x + E_2 \delta N_y + E_3 \delta N_z + G_1 \delta T_x + G_2 \delta T_y + G_3 \delta T_z \\ & \quad - \frac{\rho_0 T}{E c}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_1 \partial T} E_1 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_2 \partial T} E_2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_3 \partial T} E_3 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial T} G_1 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_2 \partial T} G_2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_3 \partial T} G_3\right)^2. \end{aligned}$$

c est positif, en vertu du postulat de Helmholtz; le premier membre est donc assurément inférieur au premier membre de l'égalité (148); toutes les fois que l'inégalité (145) est vérifiée, le premier membre de l'inégalité (150) est négatif.

Supposons que l'on fasse croître T de dT en maintenant invariables les quantités N_i, T_i; les quantités ε_i, γ_i éprouveront des accroissements

$$\frac{d\varepsilon_1}{dT} dT, \quad \frac{d\varepsilon_2}{dT} dT, \quad \frac{d\varepsilon_3}{dT} dT, \quad \frac{d\gamma_1}{dT} dT, \quad \frac{d\gamma_2}{dT} dT, \quad \frac{d\gamma_3}{dT} dT,$$

et l'on aura, en vertu des égalités (3),

$$(151) \begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_1^2} \frac{d\varepsilon_1}{dT} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_2} \frac{d\varepsilon_2}{dT} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_3} \frac{d\varepsilon_3}{dT} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_1 \partial \gamma_1} \frac{d\gamma_1}{dT} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_1 \partial \gamma_2} \frac{d\gamma_2}{dT} + \frac{\partial^2 T}{\partial \varepsilon_1 \partial \gamma_3} \frac{d\gamma_3}{dT} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_1 \partial T} = 0, \\ \dots\dots\dots, \end{cases}$$

$$(152) \begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial \varepsilon_1} \frac{d\varepsilon_1}{dT} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial \varepsilon_2} \frac{d\varepsilon_2}{dT} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial \varepsilon_3} \frac{d\varepsilon_3}{dT} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1^2} \frac{d\gamma_1}{dT} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2} \frac{d\gamma_2}{dT} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_3} \frac{d\gamma_3}{dT} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial T} = 0, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Dans ces conditions, la masse dm dégage une quantité de chaleur dQ donnée par l'égalité

$$dQ = \frac{T}{E} d\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right) dm,$$

que nous écrirons

$$dQ = -C\, dm,$$

C étant la chaleur spécifique dans le cas où l'on maintient invariables les quantités N_i, T_i. On aura, d'après ces égalités,

$$(153)\quad C = c - \frac{T}{E}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_1 \partial T}\frac{d\varepsilon_1}{dT} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_2 \partial T}\frac{d\varepsilon_2}{dT} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_3 \partial T}\frac{d\varepsilon_3}{dT} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial T}\frac{d\gamma_1}{dT} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_2 \partial T}\frac{d\gamma_2}{dT} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_3 \partial T}\frac{d\gamma_3}{dT}\right)$$

ou bien, selon les égalités (151),

$$(154)\quad C = c + \frac{T}{E}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1}\frac{d\varepsilon_1}{dT} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2}\frac{d\varepsilon_2}{dT} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_3}\frac{d\varepsilon_3}{dT} + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_1}\frac{d\gamma_1}{dT} + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_2}\frac{d\gamma_2}{dT} + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_3}\frac{d\gamma_3}{dT}\right)^{(2)}.$$

Dans les circonstances, précisées ci-dessus, où l'inégalité (145) est vérifiée quelles que soient les quantités E_1, E_2, E_3, G_1, G_2, G_3, on a sûrement

$$(155)\qquad C > c.$$

Multiplions respectivement les égalités (147) par $\frac{d\varepsilon_1}{dT}, \ldots, \frac{d\gamma_1}{dT}, \ldots$; les égalités (151) par $\rho_0 E_1, \ldots, \rho_0 G_1, \ldots$ et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons

$$(156)\quad \begin{aligned} &\frac{d\varepsilon_1}{dT}\delta N_x + \frac{d\varepsilon_2}{dT}\delta N_y + \frac{d\varepsilon_3}{dT}\delta N_z + \frac{d\gamma_1}{dT}\delta T_x + \frac{d\gamma_2}{dT}\delta T_y + \frac{d\gamma_3}{dT}\delta T_z \\ &= \rho_0\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_1 \partial T}E_1 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_2 \partial T}E_2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_3 \partial T}E_3 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial T}G_1 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_2 \partial T}G_2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_3 \partial T}G_3\right). \end{aligned}$$

D'une manière semblable, les égalités (149) et (151) donnent

$$\begin{aligned} &\frac{d\varepsilon_1}{dT}\delta' N_x + \frac{d\varepsilon_2}{dT}\delta' N_y + \frac{d\varepsilon_3}{dT}\delta' N_z + \frac{d\gamma_1}{dT}\delta' T_x + \frac{d\gamma_2}{dT}\delta' T_y + \frac{d\gamma_3}{dT}\delta' T_z \\ &= \rho_0\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_1 \partial T}E_1 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_2 \partial T}E_2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_3 \partial T}E_3 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial T}G_1 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_2 \partial T}G_2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_3 \partial T}G_3\right) \\ &\quad \times \left[1 - \frac{T}{Ec}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_1 \partial T}\frac{d\varepsilon_1}{dT} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_2 \partial T}\frac{d\varepsilon_2}{dT} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_3 \partial T}\frac{d\varepsilon_3}{dT} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial T}\frac{d\gamma_1}{dT} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_2 \partial T}\frac{d\gamma_2}{dT} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_3 \partial T}\frac{d\gamma_3}{dT}\right)\right] \end{aligned}$$

ou bien, en vertu de l'égalité (153),

$$(157)\quad \frac{d\varepsilon_1}{dT}\delta' N_x + \frac{d\varepsilon_2}{dT}\delta' N_y + \frac{d\varepsilon_3}{dT}\delta' N_z + \frac{d\gamma_1}{dT}\delta' T_x + \frac{d\gamma_2}{dT}\delta' T_y + \frac{d\gamma_3}{dT}\delta' T_z$$
$$= \rho_0 \frac{C}{c}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial\varepsilon_1 \partial T} E_1 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial\varepsilon_2 \partial T} E_2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial\varepsilon_3 \partial T} E_3 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial\gamma_1 \partial T} G_1 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial\gamma_2 \partial T} G_2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial\gamma_3 \partial T} G_3\right).$$

Les égalités (156) et (157) donnent la relation

$$(158)\quad \frac{C}{c} = \frac{\frac{d\varepsilon_1}{dT}\delta' N_x + \frac{d\varepsilon_2}{dT}\delta' N_y + \frac{d\varepsilon_3}{dT}\delta' N_z + \frac{d\gamma_1}{dT}\delta' T_x + \frac{d\gamma_2}{dT}\delta' T_y + \frac{d\gamma_3}{dT}\delta' T_z}{\frac{d\varepsilon_1}{dT}\delta N_x + \frac{d\varepsilon_2}{dT}\delta N_y + \frac{d\varepsilon_3}{dT}\delta N_z + \frac{d\gamma_1}{dT}\delta T_x + \frac{d\gamma_2}{dT}\delta T_y + \frac{d\gamma_3}{dT}\delta T_z}.$$

Cette relation, qui généralise le théorème de Reech, est due, nous l'avons dit, à M. W. Voigt; elle nous sera utile plus tard.

VII. — Application des conditions précédentes à un milieu vitreux peu déformé.

Les considérations développées au Paragraphe précédent supposent le milieu peu déformé, mais elles ne font aucune autre restriction; le milieu peut être cristallisé d'une manière quelconque; nous allons maintenant les particulariser davantage, en supposant que le milieu considéré soit un milieu vitreux.

Le passage du cas général à ce cas particulier se fait en suivant la voie marquée au Chapitre I, Paragraphe II.

La fonction φ_2 est donnée par l'égalité (15); pour qu'elle soit définie positive, il faut et il suffit que l'on ait les deux inégalités

$$(17)\quad \begin{cases} 3\Lambda(\rho_0, T) + 2M(\rho_0, T) > 0, \\ M(\rho_0, T) > 0, \end{cases}$$

que nous avions déjà obtenues au Chapitre I, Paragraphe II.

Mais alors :

1° Pour regarder ces conditions comme nécessaires, il nous fallait

regarder comme légitime la réciproque du théorème de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet. Ici, au contraire, la loi du déplacement isothermique de l'équilibre entraîne sûrement la nécessité de ces conditions.

2° Ces inégalités étant justifiées seulement pour la valeur que la densité ρ_0 prend lorsque le corps est en équilibre, à la température T, sous une pression nulle. Ici, elles sont justifiées pour toutes les valeurs que peut prendre ρ_0, à la température T, au sein d'un corps soumis à une pression uniforme nulle ou positive.

En vertu de l'égalité [*Recherches sur l'Élasticité*, seconde Partie, égalité (6)]

$$(159)\qquad \begin{aligned}\Phi = \varphi_0(T) + \varphi_1(T)(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) + \frac{\Lambda(T)}{2\rho_0}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2 \\ + \frac{M(T)}{2\rho_0}(2\varepsilon_1^2+2\varepsilon_2^2+2\varepsilon_3^2+\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2),\end{aligned}$$

les égalités (151) deviennent

$$\begin{gathered}(\Lambda+2M)\frac{d\varepsilon_1}{dT} + \Lambda\left(\frac{d\varepsilon_2}{dT}+\frac{d\varepsilon_3}{dT}\right) + \rho_0\frac{d\varphi_1(T)}{dT} = 0,\\ (\Lambda+2M)\frac{d\varepsilon_1}{dT} + \Lambda\left(\frac{d\varepsilon_3}{dT}+\frac{d\varepsilon_1}{dT}\right) + \rho_0\frac{d\varphi_1(T)}{dT} = 0,\\ (\Lambda+2M)\frac{d\varepsilon_3}{dT} + \Lambda\left(\frac{d\varepsilon_1}{dT}+\frac{d\varepsilon_2}{dT}\right) + \rho_0\frac{d\varphi_1(T)}{dT} = 0,\\ M\frac{d\gamma_1}{dT} = 0,\qquad M\frac{d\gamma_2}{dT} = 0,\qquad M\frac{d\gamma_3}{dT} = 0.\end{gathered}$$

On en tire

$$(160)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{d\gamma_1}{dT} = \frac{d\gamma_2}{dT} = \frac{d\gamma_3}{dT} = 0,\\ &\frac{d\varepsilon_1}{dT} = \frac{d\varepsilon_2}{dT} = \frac{d\varepsilon_3}{dT} = -\frac{\rho_0}{3\Lambda+2M}\frac{d\varphi_1(T)}{dT}.\end{aligned}\right.$$

Chauffé de telle sorte que les quantités N_i, T_i ne varient pas, le milieu se dilate en restant semblable à lui-même; le coefficient de

dilatation cubique a pour valeur

$$\alpha = -\frac{3}{3\Lambda + 2M}\frac{d\varphi_1(T)}{dT}, \tag{19 bis}$$

expression indiquée en (19).

En vertu des égalités (159) et (160), l'égalité (152) devient

$$C = c + \frac{T}{E}\frac{3\rho_0}{3\Lambda + 2M}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2. \tag{161}$$

Les égalités (147) donnent, moyennant l'égalité (159),

$$\begin{aligned}
\delta N_x &= -(\Lambda + 2M)E_1 - \Lambda(E_2 + E_3),\\
\delta N_y &= -(\Lambda + 2M)E_2 - \Lambda(E_3 + E_1),\\
\delta N_z &= -(\Lambda + 2M)E_3 - \Lambda(E_1 + E_2),
\end{aligned}$$

tandis que les égalités (149) deviennent

$$\left\{\begin{aligned}
\delta' N_x &= -(\Lambda + 2M)E_1 - \Lambda(E_2 + E_3) - \frac{\rho_0 T}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2(E_1 + E_2 + E_3),\\
\delta' N_y &= -(\Lambda + 2M)E_2 - \Lambda(E_3 + E_1) - \frac{\rho_0 T}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2(E_1 + E_2 + E_3).\\
\delta' N_z &= -(\Lambda + 2M)E_3 - \Lambda(E_1 + E_2) - \frac{\rho_0 T}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2(E_1 + E_2 + E_3).
\end{aligned}\right. \tag{162}$$

Dans ces formules, E_1, E_2, E_3 sont arbitraires; nous pouvons donc faire

$$E_1 = E_2 = E_3 = \mathcal{E}.$$

Elles deviennent

$$\left\{\begin{aligned}
\delta N_x &= \delta N_y = \delta N_z = -(3\Lambda + 2M)\mathcal{E},\\
\delta' N_x &= \delta' N_y = \delta' N_z = -\left\{3\Lambda + 2M + \frac{3\rho_0 T}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2\right\}\mathcal{E}.
\end{aligned}\right. \tag{163}$$

Les égalités (158), (160) et (163) donnent sans peine

$$\frac{C}{c} = \frac{3\Lambda + 2M + \frac{3\rho_0 T}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2}{3\Lambda + 2M}, \tag{164}$$

formule qui nous sera utile plus tard.

Ce Chapitre, que nous terminerons ici, montre clairement quels avantages il y a à prendre pour postulat fondamental, dans l'étude des milieux élastiques, la loi du déplacement isothermique de l'équilibre, de préférence à certaines hypothèses touchant la stabilité. Rappelons, à ce sujet, que l'expression à laquelle nous avons donné le nom de *travail perturbateur isothermique* s'est présentée, pour la première fois, dans les recherches de Lord Rayleigh (1).

(1) Lord Rayleigh, *General Theorems relating to Equilibrium and initial and steady Motions* (*Philosophical Magazine*, t. XLIX, p. 218; 1875. — *Scientific Papers*, vol. I, p. 232).

RECHERCHES SUR L'ÉLASTICITÉ.

PAR M. P. DUHEM.

QUATRIÈME PARTIE.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES ONDES DANS LES MILIEUX VISQUEUX ET NON VISQUEUX.

CHAPITRE I.

THÉORIE GÉNÉRALE DE LA PROPAGATION DES ONDES AU SEIN DES MILIEUX DÉNUÉS DE VISCOSITÉ.

I. — Quelques lemmes de Cinématique.

Lorsque nous aurons à étudier la propagation d'une onde au sein d'un milieu élastique, nous aurons à rapporter cette onde tantôt au milieu pris dans son état primitif, c'est-à-dire à l'espace des a, b, c, tantôt au milieu déformé, c'est-à-dire à l'espace des x, y, z.

Dans le premier cas, nous désignerons par Σ la surface d'onde tracée dans l'espace des a, b, c; par l, m, n les cosinus directeurs de la demi-normale à cette surface, cette demi-normale étant orientée de la région que nous nommerons 2 à la région que nous nommerons 1; par $\mathfrak{N}$ la *vitesse de propagation de l'onde Σ, rapportée à l'espace des a, b, c, et comptée positivement dans la direction de la demi-normale* (l, m, n).

Dans le second cas, nous désignerons par S la surface d'onde, par α, β, γ les cosinus directeurs de la demi-normale à la surface S, orientée de la région 2 à la région 1; par $\mathfrak{U}$ la *vitesse de propagation de l'onde rapportée à l'espace des x, y, z, et comptée positivement suivant la direction de la demi-normale* (α, β, γ).

Entre les cosinus α, β, γ et les cosinus l, m, n existent des rela-

tions fort simples, données par Hugoniot. On peut écrire, en effet [*Recherches sur l'Hydrodynamique*, 1re série, deuxième Partie, Chapitre IV, § 3, égalités (244) et (245)],

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial x}\, l + \dfrac{\partial b}{\partial x}\, m + \dfrac{\partial c}{\partial x}\, n = \mathrm{K}\alpha, \\ \dfrac{\partial a}{\partial y}\, l + \dfrac{\partial b}{\partial y}\, m + \dfrac{\partial c}{\partial y}\, n = \mathrm{K}\beta, \\ \dfrac{\partial a}{\partial z}\, l + \dfrac{\partial b}{\partial z}\, m + \dfrac{\partial c}{\partial z}\, n = \mathrm{K}\gamma, \end{cases}$$

K étant une quantité qui diffère de *zéro* et qui varie selon le point que l'on considère sur la surface Σ ou sur la surface S.

Ces relations, respectivement multipliées par $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial a}$ et ajoutées membre à membre, donnent la première relation d'un nouveau groupe; ce nouveau groupe est

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial a}\alpha + \dfrac{\partial y}{\partial a}\beta + \dfrac{\partial z}{\partial a}\gamma = \dfrac{l}{\mathrm{K}}, \\ \dfrac{\partial x}{\partial b}\alpha + \dfrac{\partial y}{\partial b}\beta + \dfrac{\partial z}{\partial b}\gamma = \dfrac{m}{\mathrm{K}}, \\ \dfrac{\partial x}{\partial c}\alpha + \dfrac{\partial y}{\partial c}\beta + \dfrac{\partial z}{\partial c}\gamma = \dfrac{n}{\mathrm{K}}. \end{cases}$$

En même temps, les deux vitesses $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{U}$ seront liées par l'égalité [*Recherches sur l'Hydrodynamique*, 1re série, deuxième Partie, égalité (250)]

$$(3)\quad \left(\mathfrak{U} - \alpha\frac{\partial \xi}{\partial t} - \beta\frac{\partial \eta}{\partial t} - \gamma\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2 = \frac{\mathfrak{N}^2}{\mathrm{K}^2},$$

qui est due également à Hugoniot.

La quantité K, qui figure dans ces diverses formules, est susceptible de deux expressions différentes et équivalentes; les égalités (1), en effet, donnent

$$(4)\quad \begin{aligned} &\left(\frac{\partial a}{\partial x}\, l + \frac{\partial b}{\partial x}\, m + \frac{\partial c}{\partial x}\, n\right)^2 \\ &+ \left(\frac{\partial a}{\partial y}\, l + \frac{\partial b}{\partial y}\, m + \frac{\partial c}{\partial y}\, n\right)^2 \\ &+ \left(\frac{\partial a}{\partial z}\, l + \frac{\partial b}{\partial z}\, m + \frac{\partial c}{\partial z}\, n\right)^2 = \mathrm{K}^2, \end{aligned}$$

tandis que les égalités (2) permettent d'écrire

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\left(\frac{\partial x}{\partial a}\alpha+\frac{\partial y}{\partial a}\beta+\frac{\partial z}{\partial a}\gamma\right)^2\\ +&\left(\frac{\partial x}{\partial b}\alpha+\frac{\partial y}{\partial b}\beta+\frac{\partial z}{\partial b}\gamma\right)^2\\ +&\left(\frac{\partial x}{\partial c}\alpha+\frac{\partial y}{\partial c}\beta+\frac{\partial z}{\partial c}\gamma\right)^2=\frac{1}{K^2}. \end{aligned}$$

Considérons une *onde* qui, dans l'espace des a, b, c, soit *du second ordre par rapport à l'élongation* (ξ, η, ζ). En chaque point de la surface Σ il existe un vecteur $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ tel que l'on ait

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{llll} \left[\frac{\partial^2\xi}{\partial a^2}\right]_1^2=l^2\mathcal{F}, & \left[\frac{\partial^2\xi}{\partial a\,\partial b}\right]_1^2=lm\mathcal{F}, & \ldots, & \left[\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right]_1^2=\mathcal{N}^2\mathcal{F},\\ \left[\frac{\partial^2\eta}{\partial a^2}\right]_1^2=l^2\mathcal{G}, & \left[\frac{\partial^2\eta}{\partial a\,\partial b}\right]_1^2=lm\mathcal{G}, & \ldots, & \left[\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right]_1^2=\mathcal{N}^2\mathcal{G},\\ \left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial a^2}\right]_1^2=l^2\mathcal{H}, & \left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial a\,\partial b}\right]_1^2=lm\mathcal{H}, & \ldots, & \left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right]_1^2=\mathcal{N}^2\mathcal{H}. \end{array}\right.$$

Le vecteur $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ est la *perturbation d'élongation, rapportée à l'espace des* a, b, c, et propagée par l'onde Σ.

La surface S sera nécessairement, dans l'espace des x, y, z, une onde du second ordre par rapport à l'élongation (ξ, η, ζ). En chaque point de la surface S il existera un vecteur (Φ, Ψ, X) tel que l'on ait

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{llll} \left[\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right]_1^2=\alpha^2\Phi, & \left[\frac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial y}\right]_1^2=\alpha\beta\Phi, & \ldots, & \left[\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right]_1^2=\mathfrak{n}^2\Phi,\\ \left[\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right]_1^2=\alpha^2\Psi, & \left[\frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y}\right]_1^2=\alpha\beta\Psi, & \ldots, & \left[\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right]_1^2=\mathfrak{n}^2\Psi,\\ \left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right]_1^2=\alpha^2 X, & \left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right]_1^2=\alpha\beta X, & \ldots, & \left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right]_1^2=\mathfrak{n}^2 X. \end{array}\right.$$

Le vecteur (Φ, Ψ, X) est la *perturbation d'élongation, rapportée à l'espace des* x, y, z, et propagée par l'onde S.

Il est facile de trouver les relations qui existent, entre le vecteur $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ relatif à un point de la surface Σ et le vecteur (Φ, Ψ, X), relatif au point correspondant de la surface S.

On a, en effet,

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)\frac{\partial c}{\partial x},$$

ou bien, en vertu des égalités (2) de la première Partie de ces *Recherches sur l'Élasticité*,

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial a\,\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial a\,\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}.$$

Cette égalité, jointe aux égalités (1) et (6), donne la première des relations

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{llll} \left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}\right]_1^2 = \mathrm{K}\alpha l \mathfrak{F}, & \left[\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial a}\right]_1^2 = \mathrm{K}\beta l \mathfrak{F}, & \left[\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial a}\right]_1^2 = \mathrm{K}\gamma l \mathfrak{F}, & \\ \left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b}\right]_1^2 = \mathrm{K}\alpha m \mathfrak{F}, & \ldots, & \left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c}\right]_1^2 = \mathrm{K}\alpha n \mathfrak{F}, & \ldots, \\ \left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial a}\right]_1^2 = \mathrm{K}\alpha l \mathcal{G}, & \ldots, & & \\ \left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial a}\right]_1^2 = \mathrm{K}\alpha l \mathcal{H}, & \ldots. & & \end{array}\right.$$

Considérons maintenant l'identité

$$\frac{\partial \xi}{\partial a} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}$$

et différentions-en les deux membres par rapport à x; nous trouvons l'identité

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial a\,\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial a\,\partial c}\frac{\partial c}{\partial x} \\ &\quad = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial a}. \end{aligned}$$

Mais les égalités (1) de la première Partie de ces *Recherches sur l'Élasticité* donnent

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1 - \frac{\partial a}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial a}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial z} = -\frac{\partial a}{\partial z}.$$

L'identité précédente devient donc

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial a^2}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial^2\xi}{\partial a\,\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}+\frac{\partial^2\xi}{\partial a\,\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}$$
$$=\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}-\left(\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial a}\right).$$

Selon les égalités (1), (6), (7) et (8), cette identité donne, en tout point de la surface Σ, la première des égalités

$$(9)\qquad\left\{\begin{aligned}\Phi&=K^2\left(\frac{\partial a}{\partial x}\mathcal{F}+\frac{\partial a}{\partial y}\mathcal{G}+\frac{\partial a}{\partial z}\mathcal{H}\right),\\ \Psi&=K^2\left(\frac{\partial b}{\partial x}\mathcal{F}+\frac{\partial b}{\partial y}\mathcal{G}+\frac{\partial b}{\partial z}\mathcal{H}\right),\\ X&=K^2\left(\frac{\partial c}{\partial x}\mathcal{F}+\frac{\partial c}{\partial y}\mathcal{G}+\frac{\partial c}{\partial z}\mathcal{H}\right).\end{aligned}\right.$$

Les deux autres s'obtiennent d'une manière analogue.

Multiplions respectivement ces égalités par $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial x}{\partial b}$, $\frac{\partial x}{\partial c}$ et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons la première des égalités

$$(10)\qquad\left\{\begin{aligned}\mathcal{F}&=\frac{1}{K^2}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\Phi+\frac{\partial x}{\partial b}\Psi+\frac{\partial x}{\partial c}X\right),\\ \mathcal{G}&=\frac{1}{K^2}\left(\frac{\partial y}{\partial a}\Phi+\frac{\partial y}{\partial b}\Psi+\frac{\partial y}{\partial c}X\right),\\ \mathcal{H}&=\frac{1}{K^2}\left(\frac{\partial z}{\partial a}\Phi+\frac{\partial z}{\partial b}\Psi+\frac{\partial z}{\partial c}X\right).\end{aligned}\right.$$

Les deux autres s'obtiennent de même.

Multiplions respectivement les égalités (9) par l, m, n et ajoutons-les membre à membre en tenant compte des égalités (1); nous trouvons la relation

$$(11)\qquad l\Phi+m\Psi+nX=K^3(\alpha\mathcal{F}+\beta\mathcal{G}+\gamma\mathcal{H}).$$

Nous aurions trouvé la même relation en multipliant respectivement les égalités (10) par α, β, γ, en ajoutant membre à membre les résultats obtenus et en tenant compte des égalités (2).

Proposons-nous de former $\left[\frac{\partial\varpi}{\partial x}\right]_1^2$.

Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega}{\partial x} = & \frac{\partial \omega}{\partial \frac{\partial x}{\partial a}} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial \omega}{\partial \frac{\partial x}{\partial b}} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial \omega}{\partial \frac{\partial x}{\partial c}} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial c} \\
& + \frac{\partial \omega}{\partial \frac{\partial y}{\partial a}} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial \omega}{\partial \frac{\partial y}{\partial b}} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial \omega}{\partial \frac{\partial y}{\partial c}} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial c} \\
& + \frac{\partial \omega}{\partial \frac{\partial z}{\partial a}} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial \omega}{\partial \frac{\partial z}{\partial b}} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial b} + \frac{\partial \omega}{\partial \frac{\partial z}{\partial c}} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial c} \\
= & \frac{D(y, z)}{D(b, c)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{D(y, z)}{D(c, a)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{D(y, z)}{D(a, b)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial c} \\
& + \frac{D(z, x)}{D(b, c)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{D(z, x)}{D(c, a)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{D(z, x)}{D(a, b)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial c} \\
& + \frac{D(x, y)}{D(b, c)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial a} + \frac{D(x, y)}{D(c, a)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial b} + \frac{D(x, y)}{D(a, b)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial c}.
\end{aligned}$$

Selon les égalités (26) de la première Partie de ces *Recherches sur l'Élasticité,* cette égalité devient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega}{\partial x} = \omega \Big(& \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial c}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial c} \\
& + \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial c}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial c} \\
& + \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial b} + \frac{\partial c}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial c} \Big).
\end{aligned}$$

Les égalités (8) et (1) donnent alors la première des égalités

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned}
\left[\frac{\partial \omega}{\partial x}\right]_1^2 &= K^2 \omega (\alpha \mathcal{F} + \beta \mathcal{G} + \gamma \mathcal{H}) \alpha, \\
\left[\frac{\partial \omega}{\partial y}\right]_1^2 &= K^2 \omega (\alpha \mathcal{F} + \beta \mathcal{G} + \gamma \mathcal{H}) \beta, \\
\left[\frac{\partial \omega}{\partial z}\right]_1^2 &= K^2 \omega (\alpha \mathcal{F} + \beta \mathcal{G} + \gamma \mathcal{H}) \gamma.
\end{aligned} \right.$$

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue.

En vertu de l'égalité (11), ces égalités peuvent encore s'écrire

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned}
\left[\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial a}\right]_1^2 &= \frac{\bar{\omega}}{K} (l\Phi + m\Psi + nX) \alpha, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \right.$$

Nous avons

$$\frac{\partial \mathfrak{O}}{\partial a} = \frac{\partial \mathfrak{O}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial \mathfrak{O}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial \mathfrak{O}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}.$$

Cette égalité, jointe aux égalités (12) et (2), donne la première des égalités

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathfrak{O}}{\partial a}\right]_1^2 &= \mathrm{K}\,\mathfrak{O}(\alpha \mathfrak{F} + \beta \mathfrak{G} + \gamma \mathfrak{H})\,l, \\ \left[\frac{\partial \mathfrak{O}}{\partial b}\right]_1^2 &= \mathrm{K}\,\mathfrak{O}(\alpha \mathfrak{F} + \beta \mathfrak{G} + \gamma \mathfrak{H})\,m, \\ \left[\frac{\partial \mathfrak{O}}{\partial c}\right]_1^2 &= \mathrm{K}\,\mathfrak{O}(\alpha \mathfrak{F} + \beta \mathfrak{G} + \gamma \mathfrak{H})\,n. \end{aligned} \right.$$

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue.

En vertu de l'égalité (11), ces égalités peuvent encore s'écrire

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{\partial \mathfrak{O}}{\partial a}\right]_1^2 = \frac{\mathfrak{O}}{\mathrm{K}^2}(l\Phi + m\Psi + n\mathrm{X})\,l, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

L'équation de continuité

$$\rho\mathfrak{O} = \rho_0$$

nous montre que les surfaces Σ et S sont, en général, ondes du premier ordre pour la densité ρ. On a donc

$$(16)\quad \frac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial a} = \mathfrak{R}\,l, \qquad \frac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial b} = \mathfrak{R}\,m, \qquad \frac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial c} = \mathfrak{R}\,n,$$

$$(17)\quad \frac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial x} = \mathrm{P}\alpha, \qquad \frac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial y} = \mathrm{P}\beta, \qquad \frac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial z} = \mathrm{P}\gamma,$$

les égalités (16) se rapportant à un point de la surface Σ et les égalités (17) à un point de la surface S.

L'équation de continuité donne

$$\frac{\partial \rho}{\partial a} = -\frac{\rho_0}{\mathfrak{O}^2}\frac{\partial \mathfrak{O}}{\partial a},$$

relation qui, jointe à la première égalité (14) et à la première éga-

lité (16), donne

$$\mathcal{R} = -\frac{K\rho_0}{\mathfrak{O}}(\alpha\mathcal{F} + \beta\mathcal{G} + \gamma\mathcal{H}) \tag{18}$$

ou bien, en vertu de l'égalité (11),

$$\mathcal{R} = -\frac{\rho_0}{K^2\mathfrak{O}}(l\Phi + m\Psi + nX). \tag{19}$$

L'équation de continuité donne aussi

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = -\frac{\rho_0}{\mathfrak{O}^2}\frac{\partial\mathfrak{O}}{\partial x},$$

relation qui, jointe à la première égalité (12) et à la première égalité (17), donne

$$P = -\frac{K^2\rho_0}{\mathfrak{O}}(\alpha\mathcal{F} + \beta\mathcal{G} + \gamma\mathcal{H}) \tag{20}$$

ou bien, en vertu de l'égalité (11),

$$P = -\frac{\rho_0}{K\mathfrak{O}}(l\Phi + m\Psi + nX). \tag{21}$$

La comparaison des égalités (18) et (20), ou bien des égalités (19) et (21), donne

$$P = K\mathcal{R}. \tag{22}$$

La condition pour qu'une onde, du second ordre par rapport aux composantes ξ, η, ζ de l'élongation, soit d'ordre supérieur au premier pour la densité ρ s'exprime alors indifféremment par l'une ou l'autre des relations, équivalentes entre elles,

$$\alpha\mathcal{F} + \beta\mathcal{G} + \gamma\mathcal{H} = 0, \tag{23}$$

$$l\Phi + m\Psi + nX = 0. \tag{24}$$

Ces relations n'expriment nullement que la *perturbation d'élongation* propagée par l'onde soit transversale ni dans le milieu primitif, ce qu'exprimerait l'égalité

$$l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{H} = 0, \tag{23 bis}$$

ni dans le milieu déformé, ce qu'exprimerait l'égalité

$$\alpha\Phi + \beta\Psi + \gamma X = 0. \qquad (24\ bis)$$

Considérons les composantes u, v, w de la vitesse d'un point matériel; on peut les exprimer en fonctions de a, b, c, t ou bien en fonctions de x, y, z, t. Dans le premier cas, on a

$$u = \frac{\partial\xi(a, b, c, t)}{\partial t}, \qquad v = \frac{\partial\eta(a, b, c, t)}{\partial t}, \qquad w = \frac{\partial\zeta(a, b, c, t)}{\partial t}. \qquad (25)$$

La surface Σ étant, dans l'espace des (a, b, c), une onde du second ordre pour l'élongation (ξ, η, ζ), est onde du premier ordre pour la vitesse (u, v, w). Soient $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{w}$ les composantes de la *perturbation de vitesse* que propage cette onde; nous aurons, en tout point de la surface Σ,

$$\left[\frac{\partial u}{\partial a}\right]_1^2 = l\mathfrak{v}, \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial b}\right]_1^2 = m\mathfrak{v}, \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial c}\right]_1^2 = n\mathfrak{v}, \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_1^2 = -\mathfrak{N}\mathfrak{v} \qquad (26)$$

et des égalités analogues concernant v et w. Les égalités (6), (25) et (26) donnent alors

$$\mathfrak{v} = -\mathfrak{N}\mathfrak{F}, \qquad \mathfrak{V} = -\mathfrak{N}\mathfrak{G}, \qquad \mathfrak{w} = -\mathfrak{N}\mathfrak{H}. \qquad (27)$$

Dans le milieu primitif, l'onde Σ propage une perturbation d'élongation et une perturbation de vitesse orientées suivant la même ligne.

Dans l'espace des (x, y, z), la surface S est onde du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse; si l'on désigne par U, V, W les composantes de la *perturbation de vitesse* qu'elle propage, on aura

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_1^2 = \alpha U, \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_1^2 = \beta U, \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial z}\right]_1^2 = \gamma U, \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_1^2 = -\mathfrak{n} U \qquad (28)$$

et des égalités analogues concernant v et w.

D'autre part, la première égalité (25) donne

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2\xi}{\partial a\,\partial t}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial^2\xi}{\partial b\,\partial t}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial^2\xi}{\partial c\,\partial t}\frac{\partial c}{\partial x}.$$

Cette égalité, jointe aux égalités (6) et (1), donne l'égalité

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_1^2 = -\mathrm{K}\alpha\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{F}.$$

Celle-ci, comparée à la première des égalités (28), donne la première des égalités

$$(29)\qquad \mathrm{U} = -\mathrm{K}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{F}, \qquad \mathrm{V} = -\mathrm{K}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{G}, \qquad \mathrm{W} = -\mathrm{K}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{H}.$$

Les deux autres s'obtiennent d'une manière analogue.

Dans le milieu déformé, l'onde S *propage une perturbation de vitesse qui est parallèle à la perturbation correspondante d'élongation que propage l'onde* Σ *dans le milieu primitif et, partant, à la perturbation de vitesse que propage cette même onde* Σ (1).

Les égalités (18) et (20), jointes aux égalités (29), permettent d'écrire

$$(18\ bis)\qquad \mathfrak{R} = \frac{\rho_0}{\mathfrak{M}\,\mathfrak{D}}(\alpha\mathrm{U} + \beta\mathrm{V} + \gamma\mathrm{W}),$$

$$(20\ bis)\qquad \mathrm{P} = \frac{\mathrm{K}\rho_0}{\mathfrak{M}\,\mathfrak{D}}(\alpha\mathrm{U} + \beta\mathrm{V} + \gamma\mathrm{W}).$$

Pour qu'une onde du second ordre par rapport aux composantes ξ, η, ζ *de l'élongation soit, par rapport à la densité* ρ, *d'ordre supérieur au premier* ($\mathfrak{R} = 0$, $\mathrm{P} = 0$), *il faut que l'on ait*

$$(30)\qquad \alpha\mathrm{U} + \beta\mathrm{V} + \gamma\mathrm{W} = 0$$

ou, en d'autres termes, que cette onde soit, dans le milieu déformé, transversale par rapport aux composantes u, v, w *de la vitesse; et cela suffit si la vitesse* $\mathfrak{M}$ *avec laquelle la surface d'onde se propage dans le milieu primitif n'est pas égale à zéro.*

Si, dans la première Partie de ces *Recherches sur l'Élasticité*, on con-

(1) *Sur la propagation des ondes dans un milieu parfaitement élastique affecté de déformations finies* (*Comptes rendus*, t. CXXXVI, 8 juin 1903, p. 1379).

sidère les égalités (2) et (8), on obtient sans peine l'égalité

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial a}.$$

Cette égalité, jointe aux égalités (8), permet d'écrire, en tout point de l'onde,

$$\left[\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x}\right]_1^2 = \mathrm{K}\alpha l\left(\frac{\partial x}{\partial a}\mathcal{F} + \frac{\partial y}{\partial a}\mathcal{G} + \frac{\partial z}{\partial a}\mathcal{H}\right).$$

Posons

$$(31) \quad \begin{cases} \mathrm{A} = \dfrac{\partial x}{\partial a}\mathcal{F} + \dfrac{\partial y}{\partial a}\mathcal{G} + \dfrac{\partial z}{\partial a}\mathcal{H}, \\ \mathrm{B} = \dfrac{\partial x}{\partial b}\mathcal{F} + \dfrac{\partial y}{\partial b}\mathcal{G} + \dfrac{\partial z}{\partial b}\mathcal{H}, \\ \mathrm{C} = \dfrac{\partial x}{\partial c}\mathcal{F} + \dfrac{\partial y}{\partial c}\mathcal{G} + \dfrac{\partial z}{\partial c}\mathcal{H}, \end{cases}$$

et l'égalité précédente deviendra la première des égalités ([1])

$$(32) \quad \begin{cases} \left[\dfrac{\partial \varepsilon_1}{\partial x}\right]_1^2 = \mathrm{K}\alpha l\mathrm{A}, \quad \left[\dfrac{\partial \varepsilon_1}{\partial y}\right]_1^2 = \mathrm{K}\beta l\mathrm{A}, \quad \left[\dfrac{\partial \varepsilon_1}{\partial z}\right]_1^2 = \mathrm{K}\gamma l\mathrm{A}, \\ \left[\dfrac{\partial \varepsilon_2}{\partial x}\right]_1^2 = \mathrm{K}\alpha m\mathrm{B}, \quad \ldots, \\ \left[\dfrac{\partial \varepsilon_3}{\partial x}\right]_1^2 = \mathrm{K}\alpha n\mathrm{C}, \quad \ldots, \\ \left[\dfrac{\partial \gamma_1}{\partial x}\right]_1^2 = \mathrm{K}\alpha(n\mathrm{B} + m\mathrm{C}), \quad \left[\dfrac{\partial \gamma_1}{\partial y}\right]_1^2 = \mathrm{K}\beta(n\mathrm{B} + m\mathrm{C}), \quad \left[\dfrac{\partial \gamma_1}{\partial z}\right]_1^2 = \mathrm{K}\gamma(n\mathrm{B} + m\mathrm{C}), \\ \left[\dfrac{\partial \gamma_2}{\partial x}\right]_1^2 = \mathrm{K}\alpha(l\mathrm{C} + n\mathrm{A}), \quad \ldots, \\ \left[\dfrac{\partial \gamma_3}{\partial x}\right]_1^2 = \mathrm{K}\alpha(m\mathrm{A} + l\mathrm{B}), \quad \ldots. \end{cases}$$

Les autres égalités (32) s'établissent comme la première.

Les égalités (31) nous donnent les expressions des quantités A, B,

---

([1]) Ces égalités ont été données dans le cours que nous avons professé en 1901-1902 à la Faculté des Sciences de Bordeaux. M. Hadamard, qui les avait obtenues de son côté, les a publiées en 1903 dans ses *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique*, p. 249.

C en fonctions des quantités $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$; parfois nous aurons besoin d'exprimer les mêmes quantités A, B, C en fonctions des grandeurs Φ, Ψ et X; nous y parviendrons de la manière suivante :

La première égalité (31), jointe aux égalités (10), donne

$$K^2A = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)^2\right]\Phi + \left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b}\right)\Psi + \left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c}\right)X.$$

Moyennant les égalités (1) et (8) de la première Partie de ces *Recherches sur l'Élasticité*, cette égalité devient la première des égalités

$$(33)\quad \begin{cases} K^2A = (1+2\varepsilon_1)\Phi + \gamma_3\Psi + \gamma_2 X, \\ K^2B = \gamma_3\Phi + (1+2\varepsilon_2)\Psi + \gamma_1 X, \\ K^2C = \gamma_2\Phi + \gamma_1\Psi + (1+2\varepsilon_3)X. \end{cases}$$

Les deux autres s'obtiennent d'une manière analogue.

II. — Propagation d'une onde au sein d'un milieu dénué de viscosité. Composantes de l'élongation rapportées au milieu primitif.

Passons maintenant à des considérations dynamiques.

Pour ne pas les compliquer outre mesure, nous ne garderons pas ici toute la généralité qu'avaient les formules établies en la première Partie de ces *Recherches*. Nous admettrons, aussi bien au cours du présent Chapitre qu'au cours du Chapitre suivant, que *chaque masse élémentaire est soumise seulement à une action extérieure newtonienne;* nous désignerons par X_e, Y_e, Z_e les composantes du champ et nous supposerons ces quantités continues ainsi que leurs dérivées partielles des divers ordres.

En second lieu, au présent Chapitre, *nous supposerons le milieu dénué de viscosité*.

En revanche, dans les considérations que la première Partie de ces *Recherches* a développées, nous introduirons une généralisation; cette généralisation, sans compliquer les calculs, augmentera beaucoup la portée des résultats.

Nous avons supposé, en la première Partie de ces *Recherches*, que les déformations du milieu étaient rapportées à un état initial homogène et *isotrope;* la possibilité de rapporter l'état actuel du milieu à un tel état initial définit le milieu *vitreux*. Au présent Chapitre, nous admettrons encore que l'état initial (a, b, c) auquel nous rapportons les déformations soit homogène, mais nous ne supposerons plus qu'il soit forcément *isotrope;* en d'autres termes, nous admettrons que le milieu étudié puisse être soit un milieu *vitreux*, soit un milieu *cristallisé*.

Si nous passons en revue les raisonnements développés dans notre première Partie, nous verrons que, pour un milieu vitreux soumis exclusivement à des actions extérieures newtoniennes et dénué de viscosité, l'isotropie de l'état initial n'a été invoquée que trois fois :

Une première fois, en passant des égalités (45) aux égalités (45 *bis*) de la première Partie, pour déterminer de quelle manière $e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3$ dépendent de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$; au présent Chapitre, nous ferons exclusivement usage des égalités (45) de la première Partie.

Une seconde fois, en passant des égalités (85) aux égalités (85 *bis*) de la première Partie, pour déterminer de quelle manière $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3, \mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2, \mathrm{g}_3$ dépendent de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$; au présent Chapitre, nous ferons exclusivement usage des égalités (85) de la première Partie.

Une troisième fois, enfin, dans l'étude de la propagation de la chaleur par conductibilité, lorsque nous avons admis que les trois quantités k_1, k_2, k_3 écrites en l'égalité (89) de la première Partie étaient les trois déterminations $k(\mathrm{T}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, $k(\mathrm{T}, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_1)$, $k(\mathrm{T}, \sigma_3, \sigma_1, \sigma_2)$ d'une même fonction $k(\mathrm{T}, \sigma, \sigma', \sigma'')$; mais les formules qui suivent cette égalité (89) ont une forme indépendante de cette hypothèse; nous pourrons donc en faire usage.

Les égalités (82) de la première Partie et (6) du présent Chapitre nous enseignent que l'on a, en tout point de l'onde,

$$(34)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial \mathrm{N}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{T}_z}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{T}_y}{\partial z}\right)_1^2 + \rho \mathfrak{N}^2 \mathfrak{F} = 0, \\ &\left(\frac{\partial \mathrm{T}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{N}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{T}_x}{\partial z}\right)_1^2 + \rho \mathfrak{N}^2 \mathfrak{G} = 0, \\ &\left(\frac{\partial \mathrm{T}_y}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{T}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{N}_z}{\partial z}\right)_1^2 + \rho \mathfrak{N}^2 \mathfrak{H} = 0. \end{aligned} \right.$$

Proposons-nous de former la quantité

$$\left[\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T_z}{\partial y} + \frac{\partial T_y}{\partial z}\right]_1^2.$$

Les quantités N_i, T_i sont données par les égalités (62) de la première Partie où, selon les égalités (61) de la même Partie, les quantités $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{G}_i$ doivent être réduites à e_i, g_i.

Nous aurons alors

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T_z}{\partial y} + \frac{\partial T_y}{\partial z} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 \tag{35}$$

avec

$$\varphi_1 = \frac{N_x}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{T_z}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{T_y}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z}, \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2 = \rho \Big\{ & e_1\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial a}\right] \\
& + e_2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial b}\right] \\
& + e_3\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial c}\right] \\
& + g_1\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}\right. \\
& \qquad \left. + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}\right] \\
& + g_2\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a}\right. \\
& \qquad \left. + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c}\right] \\
& + g_3\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b}\right. \\
& \qquad \left. + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a}\right]\Big\},
\end{aligned} \tag{37}$$

$$(38)\quad \varphi_3=\rho\sum_\lambda\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial e_1}{\partial\lambda}\\
&+\left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial e_2}{\partial\lambda}\\
&+\left(\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial e_3}{\partial\lambda}\\
&+\left[\left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial c}+\left(\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial b}\right]\frac{\partial g_1}{\partial\lambda}\\
&+\left[\left(\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial a}+\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial c}\right]\frac{\partial g_2}{\partial\lambda}\\
&+\left[\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial b}+\left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial a}\right]\frac{\partial g_3}{\partial\lambda}\end{aligned}\right\},$$

$$(\lambda=\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3),$$

$$(39)\quad \varphi_4=\rho\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}\right)\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial e_1}{\partial T}\\
&+\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial b}\right)\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial e_2}{\partial T}\\
&+\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c}+\frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c}\right)\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial e_3}{\partial T}\\
&+\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial b}\right)\frac{\partial x}{\partial c}+\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c}+\frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c}\right)\frac{\partial x}{\partial b}\right]\frac{\partial g_1}{\partial T}\\
&+\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c}+\frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c}\right)\frac{\partial x}{\partial a}+\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}\right)\frac{\partial x}{\partial c}\right]\frac{\partial g_2}{\partial T}\\
&+\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}\right)\frac{\partial x}{\partial b}+\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial b}\right)\frac{\partial x}{\partial a}\right]\frac{\partial g_3}{\partial T}\end{aligned}\right\}.$$

On peut écrire

$$(40)\qquad \left[\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial T_z}{\partial y}+\frac{\partial T_y}{\partial z}\right]_1^2=[\varphi_1]_1^2+[\varphi_2]_1^2+[\varphi_3]_1^2+[\varphi_4]_1^2.$$

Les égalités (36) et (12) donnent, en remarquant que $\rho\varpi=\rho_0$,

$$(41)\qquad [\varphi_1]_1^2=-K^2[\alpha N_x+\beta T_z+\gamma T_y)(\alpha\mathcal{F}+\beta\mathcal{G}+\gamma\mathcal{H}).$$

Les égalités (37), (8) et (2) donnent

$$(42)\quad [\varphi_2]_1^2 = \rho(e_1 l^2 + e_2 m^2 + e_3 n^2 + 2g_1 mn + 2g_2 nl + 2g_3 lm)\mathcal{F}$$
$$+ \mathrm{K}\rho\Big[e_1 l\frac{\partial x}{\partial a} + e_2 m\frac{\partial x}{\partial b} + e_3 n\frac{\partial x}{\partial c}$$
$$+ g_1\left(m\frac{\partial x}{\partial c} + n\frac{\partial x}{\partial b}\right) + g_2\left(n\frac{\partial x}{\partial a} + l\frac{\partial x}{\partial c}\right) + g_3\left(l\frac{\partial x}{\partial b} + m\frac{\partial x}{\partial a}\right)\Big]$$
$$\times(\alpha\mathcal{F} + \beta\mathcal{G} + \gamma\mathcal{H}).$$

D'ailleurs, les égalités (2), jointes aux égalités (62) de la première Partie de ces *Recherches,* donnent l'égalité

$$\mathrm{K}(\alpha \mathrm{N}_x + \beta \mathrm{T}_z + \gamma \mathrm{T}_y)$$
$$= \rho\Big[e_1 l\frac{\partial x}{\partial a} + e_2 m\frac{\partial x}{\partial b} + e_3 n\frac{\partial x}{\partial c}$$
$$+ g_1\left(m\frac{\partial x}{\partial c} + n\frac{\partial x}{\partial b}\right) + g_2\left(n\frac{\partial x}{\partial a} + l\frac{\partial x}{\partial c}\right) + g_3\left(l\frac{\partial x}{\partial b} + m\frac{\partial x}{\partial a}\right)\Big].$$

Les égalités (41) et (42) se réunissent donc en une seule; posons

$$(43)\qquad \mathrm{Q} = -(e_1 l^2 + e_2 m^2 + e_3 n^2 + 2g_1 mn + 2g_2 nl + 2g_3 lm)$$

et nous aurons simplement

$$(44)\qquad [\varphi_1]_1^2 + [\varphi_2]_1^2 = -\rho \mathrm{Q}\mathcal{F}.$$

Les égalités (38), (32) et (2) donnent

$$(45)\quad [\varphi_3]_1^2 = \rho\Big\{\Big[\left(l\frac{\partial e_1}{\partial \varepsilon_1} + m\frac{\partial e_1}{\partial \gamma_3} + n\frac{\partial e_1}{\partial \gamma_2}\right) l\frac{\partial x}{\partial a}$$
$$+ \left(l\frac{\partial e_2}{\partial \varepsilon_1} + m\frac{\partial e_2}{\partial \gamma_3} + n\frac{\partial e_2}{\partial \gamma_2}\right) m\frac{\partial x}{\partial b}$$
$$+ \left(l\frac{\partial e_3}{\partial \varepsilon_1} + m\frac{\partial e_3}{\partial \gamma_3} + n\frac{\partial e_3}{\partial \gamma_2}\right) n\frac{\partial x}{\partial c}$$
$$+ \left(l\frac{\partial g_1}{\partial \varepsilon_1} + m\frac{\partial g_1}{\partial \gamma_3} + n\frac{\partial g_1}{\partial \gamma_2}\right)\left(m\frac{\partial x}{\partial c} + n\frac{\partial x}{\partial b}\right)$$
$$+ \left(l\frac{\partial g_2}{\partial \varepsilon_1} + m\frac{\partial g_2}{\partial \gamma_3} + n\frac{\partial g_2}{\partial \gamma_2}\right)\left(n\frac{\partial x}{\partial a} + l\frac{\partial x}{\partial c}\right)$$
$$+ \left(l\frac{\partial g_3}{\partial \varepsilon_1} + m\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_3} + n\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_2}\right)\left(l\frac{\partial x}{\partial b} + m\frac{\partial x}{\partial a}\right)\Big]\mathrm{A}$$

$$+\left[\left(l\frac{\partial e_1}{\partial\gamma_3}+m\frac{\partial e_1}{\partial\varepsilon_2}+n\frac{\partial e_1}{\partial\gamma_1}\right)\quad l\frac{\partial x}{\partial a}+\ldots\ldots\right]B$$
$$+\left[\left(l\frac{\partial e_1}{\partial\gamma_2}+m\frac{\partial e_1}{\partial\gamma_1}+n\frac{\partial e_1}{\partial\varepsilon_3}\right)\quad l\frac{\partial x}{\partial a}+\ldots\ldots\right]C\Big\}.$$

Selon l'élégante notation indiquée par M. J. Hadamard (¹), posons

$$(46)\qquad \begin{cases} lA=E_1, & mB=E_2, & nC=E_3,\\ mC+nB=G_1, & nA+lC=G_2, & lB+mA=G_3\end{cases}$$

et

$$(47)\qquad J=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}E_1+\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}E_2+\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}E_3+\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}G_1+\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2}G_2+\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3}G_3\right)^{(2)}.$$

Dans cette égalité (47), (2) désigne un carré symbolique où l'on doit remplacer, par exemple, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}\right)^2$ par $\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1^2}$ et $\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}$ par $\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial\varepsilon_2}$.

J est une forme quadratique en

$$E_1,\quad E_2,\quad E_3,\quad G_1,\quad G_2,\quad G_3;$$

partant, selon les égalités (46), c'est aussi une forme quadratique en

$$A,\quad B,\quad C,$$

et les égalités (31) la transforment en une forme quadratique des trois grandeurs

$$\mathcal{F},\quad \mathcal{G},\quad \mathcal{K}.$$

On peut aisément mettre l'égalité (45) sous la forme

$$2[\varphi_3]_1^2=-\rho l\left(\frac{\partial J}{\partial E_1}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial J}{\partial G_3}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial J}{\partial G_2}\frac{\partial x}{\partial c}\right)$$
$$-\rho m\left(\frac{\partial J}{\partial G_3}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial J}{\partial E_2}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial J}{\partial G_1}\frac{\partial x}{\partial c}\right)$$
$$-\rho n\left(\frac{\partial J}{\partial G_2}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial J}{\partial G_1}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial J}{\partial E_3}\frac{\partial x}{\partial c}\right).$$

(¹) J. HADAMARD, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique*, p. 251. Paris, 1903.

En vertu des égalités (46), cette égalité peut encore s'écrire

$$2[\varphi_3]_1^2 = -\rho\left(\frac{\partial J}{\partial A}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial J}{\partial B}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial J}{\partial C}\frac{\partial x}{\partial c}\right).$$

En vertu des égalités (31), elle se réduit à

$$(48) \qquad 2[\varphi_3]_1^2 = -\rho\frac{\partial J}{\partial \mathfrak{J}}.$$

Reste à évaluer $[\varphi_4]_1^2$.

Si l'onde Σ est du premier ordre par rapport à la température absolue T, il existe en tout point de l'onde Σ une grandeur ϑ telle que l'on ait

$$(49) \qquad \begin{cases} \left[\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}\right]_1^2 = \left[\frac{\partial T}{\partial a}\right]_1^2 = l\vartheta, \\ \left[\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial b}\right]_1^2 = \left[\frac{\partial T}{\partial b}\right]_1^2 = m\vartheta, \\ \left[\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c}\right]_1^2 = \left[\frac{\partial T}{\partial c}\right]_1^2 = n\vartheta. \end{cases}$$

Si, par rapport à la température absolue T, l'onde Σ est d'ordre supérieur au premier, on a

$$(50) \qquad \vartheta = 0.$$

Par rapport à la température absolue T, l'onde S, tracée dans l'espace des (x, y, z), est du même ordre que l'onde Σ; on a donc, en tout point de l'onde S, une grandeur Θ, nulle en même temps que ϑ, et vérifiant, lorsqu'elle n'est pas nulle, les égalités

$$(51) \qquad \left[\frac{\partial T}{\partial x}\right]_1^2 = \alpha\Theta, \qquad \left[\frac{\partial T}{\partial y}\right]_1^2 = \beta\Theta, \qquad \left[\frac{\partial T}{\partial z}\right]_1^2 = \gamma\Theta.$$

Les égalités (2), (49) et (51) montrent que la valeur de ϑ en un point de l'onde Σ et la valeur de Θ au point correspondant de l'onde S sont reliées par l'égalité

$$(52) \qquad \Theta = K\vartheta.$$

Si, par rapport à la température absolue, l'onde Σ est d'ordre supérieur au premier, les égalités (39), (49) et (50) donnent immédiatement

$$(53) \qquad [\varphi_4]_1^2 = 0.$$

Si, au contraire, l'onde Σ est du premier ordre par rapport à la température absolue T, les égalités (39) et (49) donnent

$$(54)\quad [\varphi_4]_1^2 = \rho\left[l\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial e_1}{\partial \mathrm{T}} + m\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial e_2}{\partial \mathrm{T}} + n\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial e_3}{\partial \mathrm{T}} + \left(m\frac{\partial x}{\partial c} + n\frac{\partial x}{\partial b}\right)\frac{\partial g_1}{\partial \mathrm{T}} + \left(n\frac{\partial x}{\partial a} + l\frac{\partial x}{\partial c}\right)\frac{\partial g_2}{\partial \mathrm{T}} + \left(l\frac{\partial x}{\partial b} + m\frac{\partial x}{\partial a}\right)\frac{\partial g_3}{\partial \mathrm{T}}\right]\mathfrak{S}.$$

La détermination de $\mathfrak{S}$ se tire de la relation supplémentaire [(*Recherches sur l'élasticité*, 1re Partie, égalité (94)].

Si le milieu est bon conducteur de la chaleur, cas auquel les coefficients de conductibilité ne sont pas tous nuls, la relation supplémentaire montre immédiatement que l'onde est au moins du second ordre par rapport à la température T; c'est donc l'égalité (53) qui doit être employée dans ce cas.

Dans le cas où le milieu ne conduit pas la chaleur, la relation supplémentaire exprime simplement que la quantité de chaleur dégagée, dans le temps dt, par chacun des éléments du système est nulle. Comme le milieu n'est pas visqueux, l'égalité (86) de la première Partie réduit cette relation à

$$c\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t} + \mathfrak{e}_1\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + \mathfrak{e}_2\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} + \mathfrak{e}_3\frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t} + \mathfrak{g}_1\frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + \mathfrak{g}_2\frac{\partial \gamma_2}{\partial t} + \mathfrak{g}_3\frac{\partial \gamma_3}{\partial t} = 0$$

ou bien, par comparaison entre les égalités (45) et (85) de la première Partie, à

$$(54\ bis)\quad c\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t} + \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{E}}\left(\frac{\partial e_1}{\partial \mathrm{T}}\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + \frac{\partial e_2}{\partial \mathrm{T}}\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} + \frac{\partial e_3}{\partial \mathrm{T}}\frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t} + \frac{\partial g_1}{\partial \mathrm{T}}\frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + \frac{\partial g_2}{\partial \mathrm{T}}\frac{\partial \gamma_2}{\partial t} + \frac{\partial g_3}{\partial \mathrm{T}}\frac{\partial \gamma_3}{\partial t}\right) = 0.$$

D'ailleurs, les égalités (23) de la première Partie donnent

$$(55)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} &= \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial^2 \xi}{\partial a\,\partial t} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial^2 \eta}{\partial a\,\partial t} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial a\,\partial t},\\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} &= \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial^2 \xi}{\partial c\,\partial t} + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial^2 \eta}{\partial c\,\partial t} + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial c\,\partial t}\\ &\quad + \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial^2 \xi}{\partial b\,\partial t} + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial^2 \eta}{\partial b\,\partial t} + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial b\,\partial t},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Enfin, parmi les égalités (6), nous trouvons

$$(56)\quad \begin{cases} \left[\dfrac{\partial^2\xi}{\partial a\,\partial t}\right]_1^2 = -\mathfrak{K}\,l\mathfrak{F}, & \left[\dfrac{\partial^2\eta}{\partial a\,\partial t}\right]_1^2 = -\mathfrak{K}\,l\mathfrak{G}, \quad \left[\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial a\,\partial t}\right]_1^2 = -\mathfrak{K}\,l\mathfrak{H}, \\ \left[\dfrac{\partial^2\xi}{\partial b\,\partial t}\right]_1^2 = -\mathfrak{K}\,m\mathfrak{F}, & \ldots, \\ \left[\dfrac{\partial^2\xi}{\partial c\,\partial t}\right]_1^2 = -\mathfrak{K}\,n\mathfrak{F}, & \ldots, \end{cases}$$

tandis qu'aux égalités (49) on doit joindre l'égalité

$$(57)\qquad \left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]_1^2 = -\mathfrak{K}\mathfrak{S}.$$

Si à toutes ces égalités nous joignons les égalités (31) et si nous supposons $\mathfrak{K}$ différent de o, nous trouvons

$$(58)\qquad \mathfrak{S} = -\frac{T}{E}\mathfrak{T},$$

égalité dans laquelle $\mathfrak{T}$ représente une forme linéaire en A, B, C; en vertu des égalités (31), c'est aussi une forme linéaire en $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$,

$$(59)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{T} = &\left(l\frac{\partial e_1}{\partial T} + m\frac{\partial g_3}{\partial T} + n\frac{\partial g_2}{\partial T}\right)A \\ &+\left(l\frac{\partial g_3}{\partial T} + m\frac{\partial e_2}{\partial T} + n\frac{\partial g_1}{\partial T}\right)B \\ &+\left(l\frac{\partial g_2}{\partial T} + m\frac{\partial g_1}{\partial T} + n\frac{\partial e_3}{\partial T}\right)C. \end{aligned}$$

Les égalités (54), (58) et (59) nous donnent alors, pour un corps mauvais conducteur de la chaleur,

$$[\varphi_4]_1^2 = -\rho\frac{T}{E}\mathfrak{T}\left(\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial A}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial B}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial C}\frac{\partial x}{\partial c}\right)$$

ou bien, selon les égalités (31),

$$(60)\qquad [\varphi_4]_1^2 = -\frac{\rho T}{2E}\frac{\partial\mathfrak{T}^2}{\partial\mathfrak{F}}.$$

Dès lors, *si le milieu est bon conducteur de la chaleur*, les égalités (40), (44), (48) et (53) transforment la première des égalités (34) en la

première des égalités

$$
(61) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial \mathcal{F}} + Q\mathcal{F} - \mathcal{N}^2\mathcal{F} = 0, \\
&\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial \mathcal{G}} + Q\mathcal{G} - \mathcal{N}^2\mathcal{G} = 0, \\
&\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial \mathcal{H}} + Q\mathcal{H} - \mathcal{N}^2\mathcal{H} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Les deux dernières égalités (61) découlent de même des deux dernières équations (34).

Si l'on remplace dans J les lettres $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ par les lettres X, Y, Z, elle devient une certaine forme quadratique en X, Y, Z, J(X, Y, Z). L'équation que doit vérifier $\mathcal{N}^2$ pour que les équations (61) soient compatibles est l'équation qui donne les carrés inverses des demi-axes de la surface du second degré

$$
(62) \qquad J(X, Y, Z) + Q(X^2 + Y^2 + Z^2) = 1.
$$

Si le milieu est mauvais conducteur de la chaleur, les égalités (40), (44), (48) et (60) transforment la première des égalités (34) en la première des égalités

$$
(63) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \mathcal{F}}\left(J + \frac{\rho T}{E}\mathfrak{T}^2\right) + Q\mathcal{F} - \mathcal{N}^2\mathcal{F} = 0, \\
&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \mathcal{G}}\left(J + \frac{\rho T}{E}\mathfrak{T}^2\right) + Q\mathcal{G} - \mathcal{N}^2\mathcal{G} = 0, \\
&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \mathcal{H}}\left(J + \frac{\rho T}{E}\mathfrak{T}^2\right) + Q\mathcal{H} - \mathcal{N}^2\mathcal{H} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Les deux dernières égalités (63) dérivent de même des deux dernières égalités (34).

$\mathfrak{T}$ est une fonction linéaire et homogène de $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$. Si nous y remplaçons $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ par X, Y, Z, elle devient une fonction linéaire et homogène de X, Y, Z, $\mathfrak{T}(X, Y, Z)$.

Pour que les équations (63) soient compatibles, il faut et il suffit que $\mathcal{N}^2$ vérifie une certaine équation du troisième degré; c'est l'équation qui donne les carrés inverses des demi-axes de la qua-

drique

$$J(X, Y, Z) + Q(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{\rho T}{E}[\mathfrak{E}(X, Y, Z)]^2 = 1. \tag{64}$$

Étudions la nature des surfaces du second degré que représentent les équations (62) et (64).

Selon l'égalité (127) de la troisième Partie de ces *Recherches sur l'élasticité* (1), on doit avoir l'inégalité

$$\begin{aligned}(65)\qquad &\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}\left(\frac{\partial x}{\partial a}a_{11} + \frac{\partial y}{\partial a}a_{21} + \frac{\partial z}{\partial a}a_{31}\right) + \ldots\right.\\ &+ \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}\left(\frac{\partial x}{\partial b}a_{13} + \frac{\partial y}{\partial b}a_{23} + \frac{\partial z}{\partial b}a_{33}\right.\\ &\qquad \left.\left.+ \frac{\partial x}{\partial c}a_{12} + \frac{\partial y}{\partial c}a_{22} + \frac{\partial z}{\partial c}a_{32}\right) + \ldots\right]^{(2)}\\ &+ \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}(a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2) + \ldots\\ &+ 2\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}(a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33}) + \ldots \qquad > 0,\end{aligned}$$

quelles que soient les valeurs attribuées aux quantités a_{ij}.

Dans cette inégalité, faisons (2)

$$(66)\qquad \begin{cases} a_{11} = l\mathcal{F}, & a_{12} = m\mathcal{F}, & a_{13} = n\mathcal{F},\\ a_{21} = l\mathcal{G}, & a_{22} = m\mathcal{G}, & a_{23} = n\mathcal{G},\\ a_{31} = l\mathcal{H}, & a_{32} = m\mathcal{H}, & a_{33} = n\mathcal{H}.\end{cases}$$

Cette inégalité (65) deviendra, en tenant compte des égalités (31),

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}lA + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}mB + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}nC\right.\\ &\left.+ \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}(mC + nB) + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2}(nA + lC) + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3}(lB + mA)\right]^{(2)}\\ &+ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}l^2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}m^2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}n^2 + 2\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}mn + 2\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2}nl + 2\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3}lm\right)(\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2 + \mathcal{H}^2) > 0\end{aligned}$$

---

(1) En la troisième Partie de ces *Recherches*, les lettres ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 sont remplacées par e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3; les quantités a_{ij} sont remplacées par les symboles δa_{ij}.

(2) Les égalités (66) ont la forme indiquée aux égalités (137) de la troisième Partie, forme à laquelle se rattachent certaines considérations de stabilité, dues à M. J. Hadamard, et discutées en cette troisième Partie, Chapitre III, § 4.

ou bien, selon les égalités (43), (46) et (47),

$$J(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}) + Q(\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2 + \mathcal{H}^2) > 0. \tag{67}$$

Cette inégalité ayant lieu quels que soient $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, nous voyons que la *surface représentée par l'équation* (62) *est un ellipsoïde réel* $\mathcal{E}$.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

A chaque point d'une onde Σ, du second ordre par rapport à l'élongation (ξ, η, ζ), tracée dans l'espace (a, b, c) qui représente l'état initial du milieu conducteur de la chaleur, correspond un ellipsoïde réel $\mathcal{E}$. Pour qu'une perturbation d'élongation, rapportée au même état initial, puisse être propagée par l'onde Σ, il faut qu'elle soit dirigée suivant un des axes de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$. La vitesse de propagation, rapportée également à l'espace des (a, b, c), est l'inverse de la moitié de cet axe.

Ce beau théorème est dû à M. J. Hadamard (¹); mais, par suite d'une inadvertance, M. Hadamard l'a énoncé, non pas pour la perturbation d'élongation rapportée au milieu initial, mais pour la perturbation d'élongation rapportée au milieu dans son état actuel de déformation, c'est-à-dire à l'espace des (x, y, z); au prochain paragraphe, nous verrons qu'il serait alors inexact.

En outre, la démonstration de M. Hadamard supposait que la température du milieu demeurait invariable tandis que l'onde s'y propageait; la nôtre suppose seulement que le milieu étudié est capable de propager la chaleur par conductibilité.

Le théorème de M. Hadamard a été précédé par des propositions dues à Green (²) et à Poisson (³).

Ni Green, ni Poisson, cela va sans dire, n'ont traité le problème de la propagation des ondes au point de vue qu'ont considéré les premiers Christoffel et Hugoniot; ils ont traité la propagation d'*ondes*

(¹) J. Hadamard, *Leçons sur la théorie des ondes et sur les équations de l'Hydrodynamique*. Paris, 1903, p. 252.

(²) G. Green, *On the propagation of light in crystallized media* (*Cambridge Phil. Soc.*, 20 mai 1839; *Mathematical Papers of the late George Green*).

(³) Poisson, *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps cristallisés*, lu à l'Académie le 28 octobre 1839 (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XVIII).

planes au sens classique de ce mot; en outre, Poisson supposait le milieu infiniment peu déformé et Green, après avoir supposé que les déformations pouvaient être finies, introduisait dans l'évaluation du potentiel interne une restriction qui n'est acceptable que pour les déformations infiniment petites. Enfin, Green, comme Poisson, ne tenait aucun compte des variations possibles de la température.

Dans ces conditions restreintes, les deux illustres géomètres ont démontré un théorème semblable à la proposition, due à M. Hadamard, dont nous avons rappelé l'énoncé.

Si la surface représentée par l'égalité (62) est un ellipsoïde réel $\mathcal{E}$, *la surface représentée par l'égalité* (64) *est,* a fortiori, *un ellipsoïde réel* $\mathcal{E}'$; de plus, *l'ellipsoïde* $\mathcal{E}'$ *est, en entier, situé à l'intérieur de l'ellipsoïde* $\mathcal{E}$.

On peut donc, *pour tout milieu non conducteur de la chaleur,* énoncer le théorème suivant :

A chaque point d'une onde Σ, *du second ordre par rapport aux composantes* ξ, η, ζ *de l'élongation, et tracée dans l'espace des* (a, b, c), *qui représente l'état initial du milieu, correspond un ellipsoïde réel* $\mathcal{E}'$. *Pour qu'une perturbation d'élongation, rapportée au même état initial, puisse être propagée par l'onde* Σ, *il faut qu'elle soit dirigée suivant un des axes de l'ellipsoïde* $\mathcal{E}'$. *La vitesse de propagation, rapportée également à l'espace des* (a, b, c), *est l'inverse de la moitié de cet axe.*

III. — Propagation des ondes au sein d'un milieu dénué de viscosité. Perturbation de la vitesse.

Au paragraphe I, nous avons démontré ce théorème :

Soit qu'on la rapporte au milieu primitif (a, b, c), *soit qu'on la rapporte au milieu déformé* (x, y, z), *la perturbation de vitesse a même orientation ; elle est parallèle à la perturbation d'élongation rapportée au milieu primitif* (a, b, c).

Ce théorème, rapproché de ceux qui ont été établis au paragraphe précédent, donne les propositions suivantes :

Si l'on se donne un point, soit dans le milieu primitif, soit dans le

milieu déformé, et l'orientation d'une onde passant par ce point, la perturbation de vitesse que cette onde peut propager est susceptible, en ce point, de trois orientations distinctes; ces trois orientations sont celles des axes principaux de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ si le milieu conduit la chaleur et celles des axes principaux de l'ellipsoïde $\mathcal{E}'$ si le milieu est dénué de toute conductibilité.

IV. — Propagation des ondes dans les milieux dénués de viscosité. Composantes de l'élongation rapportées au milieu déformé.

Nous allons traiter les questions déjà examinées au paragraphe I en rapportant les grandeurs inconnues à l'état déformé (x, y, z) du milieu; au lieu de déterminer $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, nous aurons à déterminer Φ, Ψ, X.

Dans ce but, multiplions respectivement les égalités (34) par $K^2\frac{\partial a}{\partial x}$, $K^2\frac{\partial a}{\partial y}$, $K^2\frac{\partial a}{\partial z}$ et ajoutons-les membre à membre.

La première égalité (9) nous donnera

$$K^2\rho\,\mathfrak{N}^2\left(\frac{\partial a}{\partial x}\mathcal{F}+\frac{\partial a}{\partial y}\mathcal{G}+\frac{\partial a}{\partial z}\mathcal{H}\right)=\rho\,\mathfrak{N}^2\Phi. \tag{68}$$

L'égalité (41), qui donne $[\varphi_1]_1^2$, et les égalités analogues qui donneraient $[\psi_1]_1^2$, $[\chi_1]_1^2$, jointes aux égalités (62) de la première Partie et à l'égalité (11) de cette quatrième Partie, donnent aisément

$$\begin{aligned}K^2\left\{\frac{\partial a}{\partial x}[\varphi_1]_1^2+\frac{\partial a}{\partial y}[\psi_1]_1^2+\frac{\partial a}{\partial z}[\chi_1]_1^2\right\}\\ =-\rho(e_1 l+g_3 m+g_2 n)(l\Phi+m\Psi+n\mathrm{X}).\end{aligned} \tag{69}$$

L'égalité (42), qui donne $[\varphi_2]_1^2$, et les égalités analogues, qui donneraient $[\psi_2]_1^2$, $[\chi_2]_1^2$, jointes aux égalités (10) et (11), donnent l'égalité

$$\begin{aligned}K^2\left\{\frac{\partial a}{\partial x}[\varphi_2]_1^2+\frac{\partial a}{\partial y}[\psi_2]_1^2+\frac{\partial a}{\partial z}[\chi_2]_1^2\right\}\\ = \rho(e_1 l+g_3 m+g_2)(l\Phi+m\Psi+n\mathrm{X})\\ +\rho(e_1 l^2+e_2 m^2+e_3 n^2+2g_1 mn+2g_2 nl+2g_3 lm)\Phi.\end{aligned} \tag{70}$$

L'égalité (45), qui donne $[\varphi_3]_1^2$, et les égalités analogues qui donne-

raient $[\psi_3]_1^2$, $[\chi_3]_1^2$, jointes aux égalités (33), donnent

$$(71)\quad K^2\left\{\frac{\partial a}{\partial x}[\varphi_3]_1^2+\frac{\partial a}{\partial y}[\psi_3]_1^2+\frac{\partial a}{\partial z}[\chi_3]_1^2\right\}$$

$$\begin{aligned}
=\ &\rho\Big[\left(l\frac{\partial e_1}{\partial \varepsilon_1}+m\frac{\partial e_1}{\partial \gamma_3}+n\frac{\partial e_1}{\partial \gamma_2}\right)l+\left(l\frac{\partial g_3}{\partial \varepsilon_1}+m\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_3}+n\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_2}\right)m\\
&+\left(l\frac{\partial g_2}{\partial \varepsilon_1}+m\frac{\partial g_2}{\partial \gamma_3}+n\frac{\partial g_2}{\partial \gamma_2}\right)n\Big][(1+2\varepsilon_1)\Phi+\gamma_3\Psi+\gamma_2 X]\\
+\ &\rho\Big[\left(l\frac{\partial e_1}{\partial \gamma_3}+m\frac{\partial e_1}{\partial \varepsilon_2}+n\frac{\partial e_1}{\partial \gamma_1}\right)l+\left(l\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_3}+m\frac{\partial g_3}{\partial \varepsilon_2}+n\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_1}\right)m\\
&+\left(l\frac{\partial g_2}{\partial \gamma_3}+m\frac{\partial g_2}{\partial \varepsilon_2}+n\frac{\partial g_2}{\partial \gamma_1}\right)n\Big][\gamma_3\Phi+(1+2\varepsilon_2)\Psi+\gamma_1 X]\\
+\ &\rho\Big[\left(l\frac{\partial e_1}{\partial \gamma_2}+m\frac{\partial e_1}{\partial \gamma_1}+n\frac{\partial e_1}{\partial \varepsilon_3}\right)l+\left(l\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_2}+m\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_1}+n\frac{\partial g_3}{\partial \varepsilon_3}\right)m\\
&+\left(l\frac{\partial g_2}{\partial \gamma_2}+m\frac{\partial g_2}{\partial \gamma_1}+n\frac{\partial g_2}{\partial \varepsilon_3}\right)n\Big][\gamma_2\Phi+\gamma_1\Psi+(1+2\varepsilon_3)X].
\end{aligned}$$

Si le milieu est bon conducteur de la chaleur, l'équation (63) et les équations analogues qui donneraient $[\psi_4]_1^2$, $[\chi_4]_1^2$ permettent d'écrire

$$(72)\qquad K^2\left\{\frac{\partial a}{\partial x}[\varphi_4]_1^2+\frac{\partial a}{\partial y}[\psi_4]_1^2+\frac{\partial a}{\partial z}[\chi_4]_1^2\right\}=0.$$

Si le milieu est mauvais conducteur de la chaleur, l'égalité (60) qui donne $[\varphi_4]_1^2$, et les égalités analogues qui donneraient $[\psi_4]_1^2$ et $[\chi_4]_1^2$, jointes aux égalités (59) et (33), permettent d'écrire

$$(73)\quad K^2\left\{\frac{\partial a}{\partial x}[\varphi_4]_1^2+\frac{\partial a}{\partial y}[\psi_4]_1^2+\frac{\partial a}{\partial z}[\chi_4]_1^2\right\}$$

$$\begin{aligned}
=&-\frac{T\rho}{Ec}\left(l\frac{\partial e_1}{\partial T}+m\frac{\partial g_3}{\partial T}+n\frac{\partial g_2}{\partial T}\right)\\
&\times\Big\{\left(l\frac{\partial e_1}{\partial T}+m\frac{\partial g_3}{\partial T}+n\frac{\partial g_2}{\partial T}\right)[1+2\varepsilon_1)\Phi+\gamma_3\Psi+\gamma_2 X]\\
&\quad\left(l\frac{\partial g_3}{\partial T}+m\frac{\partial e_2}{\partial T}+n\frac{\partial g_1}{\partial T}\right)[\gamma_3\Phi+(1+2\varepsilon_2)\Psi+\gamma_1 X]\\
&\quad\left(l\frac{\partial g_2}{\partial T}+m\frac{\partial g_1}{\partial T}+n\frac{\partial e_3}{\partial T}\right)[\gamma_2\Phi+\gamma_1\Psi+(1+2\varepsilon_3)X]\Big\}.
\end{aligned}$$

En ajoutant ensemble les seconds membres des égalités (68), (69), (70), (71) et (72) ou (73), nous trouvons un résultat nul, ce qui

nous donne la première des égalités

$$(74)\quad \left\{\begin{aligned} &(S_{11}+\mathcal{N}^2)\Phi + S_{12}\Psi + S_{13}X = 0,\\ &S_{21}\Phi + (S_{22}+\mathcal{N}^2)\Psi + S_{23}X = 0,\\ &S_{31}\Phi + S_{32}\Psi + (S_{33}+\mathcal{N}^2)X = 0.\end{aligned}\right.$$

Les coefficients S_{ij} dépendent de la déformation au point considéré, de la température T, et des cosinus directeurs l, m, n de la normale à l'onde, ces cosinus étant rapportés à l'état initial du milieu. Les coefficients S_{ij} n'ont pas même valeur selon que le milieu est ou n'est pas conducteur de la chaleur.

Lorsque i et j sont distincts, on n'a pas

$$(75)\qquad S_{ij} = S_{ji}.$$

Vérifions cette proposition en écrivant, pour le cas où le milieu est bon conducteur de la chaleur, les expressions de S_{12} et de S_{21}. Nous avons

$$(76)\quad \left\{\begin{aligned}
S_{22} = {} & \Big[\Big(l\frac{\partial e_1}{\partial \varepsilon_1} + m\frac{\partial e_1}{\partial \gamma_3} + n\frac{\partial e_1}{\partial \gamma_2}\Big)l + \Big(l\frac{\partial g_3}{\partial \varepsilon_1} + m\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_3} + n\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_2}\Big)m \\
& \qquad + \Big(l\frac{\partial g_2}{\partial \varepsilon_1} + m\frac{\partial g_2}{\partial \gamma_3} + n\frac{\partial g_2}{\partial \gamma_2}\Big)n\Big]\gamma_3 \\
& + \Big[\Big(l\frac{\partial e_1}{\partial \gamma_3} + m\frac{\partial e_1}{\partial \varepsilon_2} + n\frac{\partial e_1}{\partial \gamma_1}\Big)l + \Big(l\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_3} + m\frac{\partial g_3}{\partial \varepsilon_2} + n\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_1}\Big)m \\
& \qquad + \Big(l\frac{\partial g_2}{\partial \gamma_3} + m\frac{\partial g_2}{\partial \varepsilon_2} + n\frac{\partial g_2}{\partial \gamma_1}\Big)n\Big](1+2\varepsilon_2), \\
& + \Big[\Big(l\frac{\partial e_1}{\partial \gamma_2} + m\frac{\partial e_1}{\partial \gamma_1} + n\frac{\partial e_1}{\partial \varepsilon_3}\Big)l + \Big(l\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_2} + m\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_1} + n\frac{\partial g_3}{\partial \varepsilon_3}\Big)m \\
& \qquad + \Big(l\frac{\partial g_2}{\partial \gamma_2} + m\frac{\partial g_2}{\partial \gamma_1} + n\frac{\partial g_2}{\partial \varepsilon_3}\Big)n\Big]\gamma_1, \\
S_{21} = {} & \Big[\Big(l\frac{\partial g_3}{\partial \varepsilon_1} + m\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_3} + n\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_2}\Big)l + \Big(l\frac{\partial e_2}{\partial \varepsilon_1} + m\frac{\partial e_2}{\partial \gamma_3} + n\frac{\partial e_2}{\partial \gamma_2}\Big)m \\
& \qquad + \Big(l\frac{\partial g_1}{\partial \varepsilon_1} + m\frac{\partial g_1}{\partial \gamma_3} + n\frac{\partial g_1}{\partial \gamma_2}\Big)n\Big](1+2\varepsilon_1), \\
& + \Big[\Big(l\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_3} + m\frac{\partial g_3}{\partial \varepsilon_2} + n\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_1}\Big)l + \Big(l\frac{\partial e_2}{\partial \gamma_3} + m\frac{\partial e_2}{\partial \varepsilon_2} + n\frac{\partial e_2}{\partial \gamma_1}\Big)m \\
& \qquad + \Big(l\frac{\partial g_1}{\partial \gamma_3} + m\frac{\partial g_1}{\partial \varepsilon_2} + n\frac{\partial g_1}{\partial \gamma_1}\Big)n\Big]\gamma_3 \\
& + \Big[\Big(l\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_2} + m\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_1} + n\frac{\partial g_3}{\partial \varepsilon_3}\Big)l + \Big(l\frac{\partial e_2}{\partial \gamma_2} + m\frac{\partial e_2}{\partial \gamma_1} + n\frac{\partial e_2}{\partial \varepsilon_3}\Big)m \\
& \qquad + \Big(l\frac{\partial g_1}{\partial \gamma_2} + m\frac{\partial g_1}{\partial \gamma_1} + n\frac{\partial g_1}{\partial \varepsilon_3}\Big)n\Big]\gamma_2.
\end{aligned}\right.$$

Visiblement, ces deux coefficients ne sauraient être égaux entre eux, car l'expression de S_{12} contient un terme en ε_2 et un terme en γ_1 que ne contient pas l'expression de S_{21}, tandis que celle-ci contient un terme en ε_1 et un terme en γ_2 que ne contient pas l'expression de S_{12}. Le coefficient du terme en ε_2 dans S_{12} est égal au coefficient du terme en ε_1 dans S_{21}, en vertu des égalités (45) de la première Partie.

Si donc on se donne l'état d'un milieu, dénué de viscosité, au voisinage d'un certain point et l'orientation d'une onde qui passe par ce point, cette onde peut propager trois directions de la perturbation relative aux composantes de l'élongation; chacune de ces trois directions correspond à une vitesse de propagation déterminée dont la valeur, rapportée à l'état initial du milieu, est une des racines de l'équation

$$(77) \qquad \begin{vmatrix} S_{11}+\mathfrak{N}^2 & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22}+\mathfrak{N}^2 & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33}+\mathfrak{N}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Les trois directions de perturbation ne sont pas forcément rectangulaires entre elles.

V. — Propagation des ondes au sein d'un milieu dénué de viscosité et très peu déformé.

Laissant absolument quelconque l'état initial du milieu, nous supposerons que les divers points du milieu subissent seulement, à partir de cet état initial, des déplacements très petits et des variations de température très petites.

Dans ce cas, les quantités ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 seront très petites; il en sera de même des quantités Φ, Ψ, X; nous pourrons négliger, devant chacune de ces quantités, le carré de l'une quelconque d'entre elles ou le produit de deux d'entre elles; enfin, les quantités e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3 seront négligeables devant les dérivées de ces mêmes quantités par rapport aux variables ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3, T.

Dès lors, si le milieu est bon conducteur de la chaleur, nous avons, en vertu des égalités (45) de la première Partie et (69), (70), (71),

(72), de la présente Partie,

$$
(78)\quad \left\{
\begin{aligned}
S_{11} &= -\left[l^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_1^2} + m^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_3^2} + n^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_2^2} + 2mn \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_2\, \partial \gamma_3} + 2l\left(m \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_1\, \partial \gamma_3} + n \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_1\, \partial \gamma_2}\right)\right],\\
S_{22} &= -\left[l^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_3^2} + m^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_2^2} + n^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1^2} + 2nl \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_3\, \partial \gamma_1} + 2m\left(n \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_2\, \partial \gamma_1} + l \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_2\, \partial \gamma_3}\right)\right],\\
S_{33} &= -\left[l^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_2^2} + m^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1^2} + n^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_3^2} + 2lm \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1\, \partial \gamma_2} + 2n\left(l \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_3\, \partial \gamma_2} + m \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_3\, \partial \gamma_1}\right)\right],\\
S_{23} = S_{32} &= -\left\{ l^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_3\, \partial \gamma_2} + m^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_2\, \partial \gamma_1} + n^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1\, \partial \varepsilon_3} + mn\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_2\, \partial \varepsilon_3} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1^2}\right)\right.\\
&\qquad \left. + l\left[m\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_2\, \partial \gamma_2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_3\, \partial \gamma_1}\right) + n\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_3\, \partial \gamma_3} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1\, \partial \gamma_2}\right)\right]\right\},\\
S_{31} = S_{13} &= -\left\{ l^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_2\, \partial \varepsilon_1} + m^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1\, \partial \gamma_3} + n^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_3\, \partial \gamma_2} + nl\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_3\, \partial \varepsilon_1} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_2^2}\right)\right.\\
&\qquad \left. + m\left[n\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_3\, \partial \gamma_3} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1\, \partial \gamma_2}\right) + l\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_1\, \partial \gamma_1} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_2\, \partial \gamma_3}\right)\right]\right\},\\
S_{12} = S_{21} &= -\left\{ l^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_1\, \partial \gamma_3} + m_2^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_3\, \partial \varepsilon_2} + n^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_2\, \partial \gamma_1} + lm\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_1\, \partial \varepsilon_2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_3^2}\right)\right.\\
&\qquad \left. + n\left[l\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_1\, \partial \gamma_1} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_2\, \partial \gamma_3}\right) + m\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_2\, \partial \gamma_2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_3\, \partial \gamma_1}\right)\right]\right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Selon les égalités (74) et (77), *les trois valeurs de* $\mathfrak{N}$ *sont maintenant les inverses des trois demi-axes de la quadrique*

$$(79)\qquad S_{11}x^2 + S_{22}y^2 + S_{33}z^2 + 2S_{23}yz + 2S_{31}zx + 2S_{12}xy + 1 = 0,$$

et, selon les égalités (74), *les trois directions de perturbation que l'onde peut propager sont les directions de ces mêmes axes, qu'il s'agisse de perturbation d'élongation ou de perturbation de vitesse, et que la perturbation soit rapportée à l'état initial du milieu ou à son état déformé.*

Pour que les trois valeurs de la vitesse de propagation et les trois directions de perturbation auxquelles elles correspondent soient réelles, il faut et il suffit que l'équation (79) représente un ellipsoïde réel.

Or, si nous posons

$$
(80)\qquad \left\{
\begin{aligned}
E_1 &= lx, & E_2 &= my, & E_3 &= nz,\\
G_1 &= ny + mz, & G_2 &= lz + nx, & G_3 &= mx + ly,
\end{aligned}
\right.
$$

nous aurons

$$(81)\quad \begin{aligned} & S_{11}x^2 + S_{22}y^2 + S_{33}z^2 + 2S_{23}yz + 2S_{31}zx + 2S_{12}xy \\ & = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}E_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}E_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}E_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}G_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2}G_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3}G_3\right)^{(2)}, \end{aligned}$$

(2) représentant un carré symbolique.

Or, quels que soient E_1, E_2, E_3, G_1, G_2, G_3, on a [*Recherches sur l'élasticité*, 3e Partie; égalité (145)]

$$(82)\quad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}E_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}E_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}E_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}G_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2}G_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3}G_3\right)^{(2)} > 0.$$

Selon (81) et (82), l'*équation* (79) *représente assurément un ellipsoïde réel.*

Les égalités (78) ont été établies en faisant usage de l'égalité (72), partant en supposant que le milieu était conducteur de la chaleur; si le milieu est dénué de conductibilité pour la chaleur, il faut, à l'égalité (72), substituer l'égalité (73); alors les égalités (78) sont remplacées par les suivantes :

$$(83)\quad \left\{ \begin{aligned} S'_{11} = & -\left[l^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1^2} + m^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3^2} + n^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2^2} + 2mn\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2\,\partial\gamma_3} + 2l\left(n\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial\gamma_2} + m\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial\gamma_3}\right)\right. \\ & \left. + \frac{T}{Ec}\left(l\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial T} + m\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3\,\partial T} + n\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2\,\partial T}\right)^2\right], \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ S'_{23} = S'_{32} = & -\left\{l^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3\,\partial\gamma_2} + m^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial\gamma_1} + n^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial\varepsilon_3} + mn\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial\varepsilon_3} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1^2}\right)\right. \\ & + l\left[m\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial\gamma_2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3\,\partial\gamma_1}\right) + n\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3\,\partial\gamma_3} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial\gamma_2}\right)\right] \\ & \left. + \frac{T}{Ec}\left(l\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3\,\partial T} + m\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial T} + n\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial T}\right)\left(l\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2\,\partial T} + m\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial T} + n\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3\,\partial T}\right)\right\}, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \right.$$

En vertu des égalités (80) et (83), l'égalité (81) est remplacée par l'égalité

$$(84)\quad \begin{aligned} & S'_{11}x^2 + S'_{22}y^2 + S'_{33}z^2 + 2S'_{23}yz + 2S'_{31}zx + 2S'_{12}xy \\ & = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}E_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}E_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}E_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}G_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2}G_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3}G_3\right)^{(2)} \\ & \quad - \frac{T}{Ec}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial T}E_1 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial T}E_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3\,\partial T}E_3 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial T}G_1 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2\,\partial T}G_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3\,\partial T}G_3\right)^2, \end{aligned}$$

(2) désignant encore un carré symbolique.

La surface représentée par l'équation

$$(85) \qquad S'_{11}x^2 + S'_{22}y^2 + S'_{33}z^2 + 2S'_{23}yz + 2S'_{31}zx + 2S'_{12}xy + 1 = 0,$$

est alors un ellipsoïde réel situé à l'intérieur de l'ellipsoïde que représente l'équation (79).

Considérons un milieu homogène, de température T, dont la déformation très petite, la même en chaque point, soit représentée par les six quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$; les six quantités $N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z$ ont des valeurs bien déterminées, les mêmes en chaque point.

A cette déformation, donnons une variation homogène définie par les égalités

$$(86) \qquad \begin{cases} \delta\varepsilon_1 = u H_1, & \delta\varepsilon_2 = u H_2, & \delta\varepsilon_3 = u H_3, \\ \delta\gamma_1 = u K_1, & \delta\gamma_2 = u K_2, & \delta\gamma_3 = u K_3, \end{cases}$$

$H_1, H_2, H_3, K_1, K_2, K_3$ étant six quantités indépendantes de x, y, z et u une quantité infiniment petite qui est aussi indépendante de x, y, z.

Si cette variation laisse invariable la température, elle ne peut conduire à un nouvel état d'équilibre à moins que $N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z$ n'éprouvent des variations $\delta N_x, \delta N_y, \delta N_z, \delta T_x, \delta T_y, \delta T_z$; et l'on a [*Recherches sur l'élasticité*, 3e Partie, égalité (148)]

$$(87) \qquad \begin{aligned} &\delta N_x\,\delta\varepsilon_1 + \delta N_y\,\delta\varepsilon_2 + \delta N_z\,\delta\varepsilon_3 + \delta T_x\,\delta\gamma_1 + \delta T_y\,\delta\gamma_2 + \delta T_z\,\delta\gamma_3 \\ &\quad = -u^2\rho_0\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}H_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}H_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}H_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}K_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2}K_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3}K_3\right)^{(2)}. \end{aligned}$$

Si, au contraire, la variation (86) laisse invariable l'entropie de chaque élément, $N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z$ éprouvent des variations $\delta' N_x$, $\delta' N_y, \delta' N_z, \delta' T_x, \delta' T_y, \delta' T_z$ et l'on a [*Recherches sur l'élasticité*, 3e Partie, égalités (148) et (150)]

$$(88) \qquad \begin{aligned} &\delta' N_x\,\delta\varepsilon_1 + \delta' N_y\,\delta\varepsilon_2 + \delta' N_z\,\delta\varepsilon_3 + \delta' T_x\,\delta\gamma_1 + \delta' T_y\,\delta\gamma_2 + \delta' T_z\,\delta\gamma_3 \\ &\quad = -u^2\rho_0\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}H_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}H_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}H_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}K_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2}K_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3}K_3\right)^{(2)} \\ &\quad\quad - u^2\frac{\rho_0 T}{Ec}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial T}H_1 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial T}H_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3\,\partial T}H_3 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial T}K_1 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2\,\partial T}K_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3\,\partial T}K_3\right)^2. \end{aligned}$$

Entre les deux ellipsoïdes représentés par les égalités (79) et (84), ces égalités (87) et (88) donnent une remarquable relation.

Prenons un point déterminé de l'onde et, en ce point, une direction dont λ, μ, ν sont les cosinus directeurs; sur cette direction, l'ellipsoïde $\mathcal{E}$, relatif au milieu supposé conducteur de la chaleur, détermine un rayon vecteur R. Si, dans l'équation (79), on remplace x, y, z par λR, μR, νR, cette équation sera vérifiée, en sorte que l'on aura

$$(89) \qquad S_{11}\lambda^2 + S_{22}\mu^2 + S_{33}\nu^2 + 2S_{23}\mu\nu + 2S_{31}\nu\lambda + 2S_{12}\lambda\mu = -\frac{1}{R^2}.$$

D'autre part, si nous posons

$$(90) \qquad \begin{cases} H_1 = l\lambda, & H_2 = m\mu, & H_3 = n\nu, \\ K_1 = m\nu + n\mu, & K_2 = n\lambda + l\nu, & K_3 = l\mu + m\lambda, \end{cases}$$

les égalités (80) deviendront

$$\begin{matrix} E_1 = RH_1, & E_2 = RH_2, & E_3 = RH_3, \\ G_1 = RK_1, & G_2 = RK_2, & G_3 = RK_3, \end{matrix}$$

et l'égalité (81) deviendra

$$(91) \qquad \begin{aligned} &S_{11}\lambda^2 + S_{22}\mu^2 + S_{33}\nu^2 + 2S_{23}\mu\nu + 2S_{31}\nu\lambda + 2S_{12}\lambda\mu \\ &\quad = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}H_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}H_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}H_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}K_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2}K_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3}K_3\right)^{(2)}. \end{aligned}$$

Les égalités (89) et (91) donneront

$$(92) \qquad \frac{1}{R^2} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}H_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}H_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}H_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}K_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2}K_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3}K_3\right)^{(2)}.$$

Sur la direction considérée, l'ellipsoïde $\mathcal{E}'$, relatif au milieu dénué de conductibilité intercepte un rayon vecteur R'. Si, à partir des égalités (84) et (85), nous instituons un raisonnement semblable à celui qui nous a donné l'égalité (92), nous trouvons l'égalité

$$(93) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{R'^2} = &\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}H_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}H_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}H_3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}K_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2}K_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3}K_3\right)^{(2)} \\ &+ \frac{T}{Ec}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial T}H_1 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial T}H_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3\,\partial T}H_3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial T}K_1 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2\,\partial T}K_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3\,\partial T}K_3\right)^2. \end{aligned}$$

Les égalités (87), (88), (92) et (93) conduisent alors au théorème suivant :

A chaque point M *de l'onde et à chaque direction* $D(\lambda, \mu, \nu)$ *issue de ce point, on peut attacher une certaine variation* $\delta\varepsilon_1$, $\delta\varepsilon_2$, $\delta\varepsilon_3$, $\delta\gamma_1$, $\delta\gamma_2$, $\delta\gamma_3$ *de la déformation, variation définie par les égalités* (86) *et* (90).

D'autre part, sur la direction D, *l'ellipsoïde* $\mathcal{E}$, *qui convient au milieu conducteur de la chaleur, intercepte un rayon vecteur* R, *tandis que l'ellipsoïde* $\mathcal{E}'$, *qui convient aux milieux dénués de conductibilité, intercepte un rayon vecteur* R'. *On a*

$$(94) \quad \frac{R}{R'} = \sqrt{\frac{\delta' N_x\, \delta\varepsilon_1 + \delta' N_y\, \delta\varepsilon_2 + \delta' N_z\, \delta\varepsilon_3 + \delta' T_x\, \delta\gamma_1 + \delta' T_y\, \delta\gamma_2 + \delta' T_z\, \delta\gamma_3}{\delta N_x\, \delta\varepsilon_1 + \delta N_y\, \delta\varepsilon_2 + \delta N_z\, \delta\varepsilon_3 + \delta T_x\, \delta\gamma_1 + \delta T_y\, \delta\gamma_2 + \delta T_z\, \delta\gamma_3}}.$$

Si l'on se reporte au rôle que les ellipsoïdes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ jouent dans la détermination de la vitesse de propagation de l'onde, on voit que la proposition qui vient d'être énoncée remplace, dans le cas qui nous occupe, cette proposition vraie pour les fluides :

La vitesse de propagation d'une onde au sein d'un fluide supposé privé de conductibilité est à la vitesse de propagation d'une onde au sein du même fluide supposé conducteur, comme la racine carrée du coefficient de détente adiabatique est à la racine carrée du coefficient de détente isothermique.

Dans le cas des fluides, ce dernier rapport est égal à la racine carrée du rapport de la chaleur spécifique sous pression constante à la chaleur spécifique sous volume constant; peut-on, pour les corps élastiques peu déformés, énoncer une proposition analogue?

Si c est la chaleur spécifique normale et C la chaleur spécifique lorsqu'on maintient constantes les six quantités N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z, on a [*Recherches sur l'élasticité*, 3e Partie, égalité (158)]

$$(95) \quad \frac{C}{c} = \frac{\delta' N_x \frac{d\varepsilon_1}{dT} + \delta' N_y \frac{d\varepsilon_2}{dT} + \delta' N_z \frac{d\varepsilon_3}{dT} + \delta' T_x \frac{d\gamma_1}{dT} + \delta' T_y \frac{d\gamma_2}{dT} + \delta' T_z \frac{d\gamma_3}{dT}}{\delta N_x \frac{d\varepsilon_1}{dT} + \delta N_y \frac{d\varepsilon_2}{dT} + \delta N_z \frac{d\varepsilon_3}{dT} + \delta T_x \frac{d\gamma_1}{dT} + \delta T_y \frac{d\gamma_2}{dT} + \delta T_z \frac{d\gamma_3}{dT}}.$$

Le second membre de cette égalité (95) n'est pas, en général, le

carré du second membre de l'égalité (94); c'est seulement, en effet, dans des cas exceptionnels que les quantités $\delta\varepsilon_1$, $\delta\varepsilon_2$, $\delta\varepsilon_3$, $\delta\gamma_1$, $\delta\gamma_2$, $\delta\gamma_3$, définies par les égalités (86) et (90), seront respectivement proportionnelles aux six quantités $\frac{d\varepsilon_1}{dT}$, $\frac{d\varepsilon_2}{dT}$, $\frac{d\varepsilon_3}{dT}$, $\frac{d\gamma_1}{dT}$, $\frac{d\gamma_2}{dT}$, $\frac{d\gamma_3}{dT}$.

Le théorème de Laplace ne s'étend donc pas aux milieux élastiques peu déformés.

VI. — Propagation des ondes au sein d'un milieu vitreux très peu déformé.

Ce qui a été dit au paragraphe précédent a trait à un milieu très peu déformé quelconque; supposons maintenant que le milieu soit vitreux.

En vertu de l'égalité [*Recherches sur l'élasticité*, 2e Partie, égalité (6)],

$$(96)\quad \begin{aligned} \Phi = {} & \varphi_0(T) + \varphi_1(T)(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) \\ & + \frac{\Lambda(T)}{2\rho_0}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2 + \frac{M(T)}{2\rho_0}(2\varepsilon_1^2+2\varepsilon_2^2+2\varepsilon_3^2+\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2), \end{aligned}$$

on a

$$(97)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3^2} = \frac{\Lambda(T)+2M(T)}{\rho_0}, \\ & \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial\varepsilon_3} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3\,\partial\varepsilon_1} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial\varepsilon_2} = \frac{\Lambda(T)}{\rho_0}, \\ & \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3^2} = \frac{M(T)}{\rho_0}, \\ & \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial T} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial T} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3\,\partial T} = \frac{d\varphi_1(T)}{dT}. \end{aligned} \right.$$

Les autres dérivées secondes de Φ sont nulles ou infiniment petites.

Ces égalités (97), jointes aux égalités (79), (80), (81), montrent que l'équation de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ peut s'écrire

$$(98)\quad \begin{aligned} & \frac{\Lambda(T)}{\rho_0}(lx+my+nz)^2 \\ & + \frac{M(T)}{\rho_0}[2l^2x^2+2m^2y^2+2n^2z^2+(ny+mz)^2 \\ & \qquad + (lz+nx)^2+(mx+ly)^2] = 1. \end{aligned}$$

Les mêmes égalités (97), jointes aux égalités (80), (84), (85), montrent que l'équation de l'ellipsoïde $\mathcal{E}'$ peut s'écrire

$$(99)\qquad \left\{\frac{A(T)}{\rho_0}+\frac{T}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2\right\}(lx+my+nz)^2 + \frac{M(T)}{\rho_0}[2l^2x^2+2m^2y^2+2n^2z^2+(ny+mz)^2 + (lz+nx)^2+(mx+ly)^2]=1.$$

Prenons pour axe des z la normale à l'onde au point considéré, ce qui nous donnera

$$l=0,\qquad m=0,\qquad n=1.$$

L'équation (98) deviendra

$$(100)\qquad \frac{A(T)+2M(T)}{\rho_0}z^2+\frac{M(T)}{\rho_0}(x^2+y^2)=1,$$

tandis que l'équation (99) deviendra

$$(101)\qquad \frac{A(T)+\frac{T\rho_0}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2+2M(T)}{\rho_0}z^2+\frac{M(T)}{\rho_0}(x^2+y^2)=1.$$

Ces deux équations équivalent au théorème suivant :

Au sein d'un milieu vitreux très peu déformé, l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ et l'ellipsoïde $\mathcal{E}'$ sont tous deux de révolution autour de la normale à l'onde; en tous deux, le rayon de l'équateur a pour valeur

$$\sqrt{\frac{\rho_0}{M(T)}}.$$

En l'ellipsoïde $\mathcal{E}$, le demi-axe de révolution a pour longueur

$$\sqrt{\frac{\rho_0}{A(T)+2M(T)}},$$

tandis qu'en l'ellipsoïde $\mathcal{E}'$, ce même demi-axe a pour longueur

$$\sqrt{\frac{\rho_0}{A(T)+\frac{T\rho_0}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2+2M(T)}}.$$

La perturbation qu'une onde persistante peut propager est, ou exclusivement transversale, ou exclusivement longitudinale.

Que le milieu soit ou non conducteur de la chaleur, une perturbation transversale se propage avec une vitesse

$$\mathfrak{N} = \sqrt{\frac{M(T)}{\rho_0}}. \tag{102}$$

Au sein d'un milieu conducteur, une perturbation longitudinale se propage avec une vitesse

$$\mathfrak{N} = \sqrt{\frac{\Lambda(T) + 2M(T)}{\rho_0}}, \tag{103}$$

tandis qu'au sein d'un milieu non conducteur de la chaleur, elle se propage avec une vitesse

$$\mathfrak{N}' = \sqrt{\frac{\Lambda(T) + \frac{T\rho_0}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2 + 2M(T)}{\rho_0}}. \tag{104}$$

Ces égalités (102), (103), (104) avaient été obtenues directement [*Recherches sur l'élasticité*, 2e Partie, égalités (80), (76), (101)].

Pour un milieu vitreux très peu déformé, nous savons que l'on a [*Recherches sur l'élasticité*, 3e Partie, égalité (164)]

$$\frac{C}{c} = \frac{3\Lambda(T) + \frac{3T\rho_0}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2 + 2M(T)}{3\Lambda(T) + 2M(T)}. \tag{105}$$

La comparaison des égalités (103), (104), (105) montre que l'on n'a pas

$$\frac{\mathfrak{N}'^2}{\mathfrak{N}^2} = \frac{C}{c},$$

à moins que l'on ait l'égalité

$$M(T) = 0,$$

qui caractérise les fluides.

Ainsi, *en général, la correction de Laplace ne peut servir à calculer la vitesse de propagation des perturbations longitudinales au sein d'un milieu vitreux, peu déformé, supposé dénué de conductibilité, lorsqu'on connaît la valeur de cette vitesse pour le même milieu, supposé doué de conductibilité. Cette correction ne peut être employée que si le milieu est fluide.*

CHAPITRE II.

THÉORIE DES ONDES AU SEIN DES MILIEUX DOUÉS DE VISCOSITÉ.

I. — Des ondes du premier ordre par rapport aux composantes de la vitesse, au sein des milieux vitreux doués de viscosité.

Supposons d'abord que l'onde *se propage* au sein du milieu considéré :

$$\mathfrak{N} \gtrless 0. \tag{106}$$

D'après ce que nous avons vu en la troisième partie de ces *Recherches* (Chap. II, § I), l'onde ne peut être d'ordre inférieur au second par rapport aux composantes ξ, η, ζ du déplacement; elle est aussi du premier ordre par rapport à la densité ρ; d'après ce qui a été vu au Paragraphe II du même Chapitre, elle est au moins du premier ordre par rapport à la température T.

Comme dans le cas précédent, le milieu est soumis exclusivement à des actions extérieures qui sont newtoniennes. Comme dans le cas précédent, aussi, nous désignerons par :

Σ la surface d'onde dans l'espace des a, b, c;
l, m, n les cosinus directeurs de sa normale;
S la surface d'onde dans l'espace des x, y, z;
α, β, γ les cosinus directeurs de sa normale.

L'onde étant du second ordre par rapport aux composantes ξ, η, ζ du déplacement, on peut écrire les égalités suivantes, en tout point de

l'onde Σ :

$$
(107)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{l}\left[\frac{\partial^2\xi}{\partial a\,\partial t}\right]_1^2 = \frac{1}{m}\left[\frac{\partial^2\xi}{\partial b\,\partial t}\right]_1^2 = \frac{1}{n}\left[\frac{\partial^2\xi}{\partial c\,\partial t}\right]_1^2 = -\mathfrak{M}\mathcal{F},\\
&\frac{1}{l}\left[\frac{\partial^2\eta}{\partial a\,\partial t}\right]_1^2 = \frac{1}{m}\left[\frac{\partial^2\eta}{\partial b\,\partial t}\right]_1^2 = \frac{1}{n}\left[\frac{\partial^2\eta}{\partial c\,\partial t}\right]_1^2 = -\mathfrak{M}\mathcal{G},\\
&\frac{1}{l}\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial a\,\partial t}\right]_1^2 = \frac{1}{m}\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial b\,\partial t}\right]_1^2 = \frac{1}{n}\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial c\,\partial t}\right]_1^2 = -\mathfrak{M}\mathcal{H}.
\end{aligned}
\right.
$$

Les égalités (26), (27), (28) de la première Partie et (1) de la quatrième Partie donnent alors, en tout point de la surface S,

$$
(108)\quad \left\{
\begin{aligned}
&[D'_1]_1^2 = -K\mathfrak{M}\alpha\mathcal{F}, \qquad [D'_2]_1^2 = -K\mathfrak{M}\beta\mathcal{G}, \qquad [D'_3]_1^2 = -K\mathfrak{M}\gamma\mathcal{H},\\
&[G'_1]_1^2 = -K\mathfrak{M}(\beta\mathcal{H} + \gamma\mathcal{G}),\\
&[G'_2]_1^2 = -K\mathfrak{M}(\gamma\mathcal{F} + \alpha\mathcal{H}),\\
&[G'_3]_1^2 = -K\mathfrak{M}(\alpha\mathcal{G} + \beta\mathcal{F}).
\end{aligned}
\right.
$$

Moyennant ces égalités (108), les égalités (33) de la première Partie donnent

$$
(109)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{d}_1 = [\Delta'_1]_1^2 &= -K\mathfrak{M}\quad (\alpha\mathfrak{X}_1 + \beta\mathfrak{Y}_1 + \gamma\mathfrak{Z}_1)(\mathfrak{X}_1\mathcal{F} + \mathfrak{Y}_1\mathcal{G} + \mathfrak{Z}_1\mathcal{H}),\\
\mathfrak{d}_2 = [\Delta'_2]_1^2 &= -K\mathfrak{M}\quad (\alpha\mathfrak{X}_2 + \beta\mathfrak{Y}_2 + \gamma\mathfrak{Z}_2)(\mathfrak{X}_2\mathcal{F} + \mathfrak{Y}_2\mathcal{G} + \mathfrak{Z}_2\mathcal{H}),\\
\mathfrak{d}_3 = [\Delta'_3]_1^2 &= -K\mathfrak{M}\quad (\alpha\mathfrak{X}_3 + \beta\mathfrak{Y}_3 + \gamma\mathfrak{Z}_3)(\mathfrak{X}_3\mathcal{F} + \mathfrak{Y}_3\mathcal{G} + \mathfrak{Z}_3\mathcal{H}),\\
\mathfrak{g}_1 = [\Gamma'_1]_1^2 &= -K\mathfrak{M}[\ (\alpha\mathfrak{X}_2 + \beta\mathfrak{Y}_2 + \gamma\mathfrak{Z}_2)(\mathfrak{X}_3\mathcal{F} + \mathfrak{Y}_3\mathcal{G} + \mathfrak{Z}_3\mathcal{H})\\
&\qquad + (\alpha\mathfrak{X}_3 + \beta\mathfrak{Y}_3 + \gamma\mathfrak{Z}_3)(\mathfrak{X}_2\mathcal{F} + \mathfrak{Y}_2\mathcal{G} + \mathfrak{Z}_2\mathcal{H})],\\
\mathfrak{g}_2 = [\Gamma'_2]_1^2 &= -K\mathfrak{M}[\ (\alpha\mathfrak{X}_3 + \beta\mathfrak{Y}_3 + \gamma\mathfrak{Z}_3)(\mathfrak{X}_1\mathcal{F} + \mathfrak{Y}_1\mathcal{G} + \mathfrak{Z}_1\mathcal{H})\\
&\qquad + (\alpha\mathfrak{X}_1 + \beta\mathfrak{Y}_1 + \gamma\mathfrak{Z}_1)(\mathfrak{X}_3\mathcal{F} + \mathfrak{Y}_3\mathcal{G} + \mathfrak{Z}_3\mathcal{H})],\\
\mathfrak{g}_3 = [\Gamma'_3]_1^2 &= -K\mathfrak{M}[\ (\alpha\mathfrak{X}_1 + \beta\mathfrak{Y}_1 + \gamma\mathfrak{Z}_1)(\mathfrak{X}_2\mathcal{F} + \mathfrak{Y}_2\mathcal{G} + \mathfrak{Z}_2\mathcal{H})\\
&\qquad + (\alpha\mathfrak{X}_2 + \beta\mathfrak{Y}_2 + \gamma\mathfrak{Z}_2)(\mathfrak{X}_1\mathcal{F} + \mathfrak{Y}_1\mathcal{G} + \mathfrak{Z}_1\mathcal{H})].
\end{aligned}
\right.
$$

Ce que nous venons de dire, joint aux égalités (62) de la première Partie, montre que les quantités N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z varient d'une manière continue au travers de la surface S. Mais il n'en est pas de même des quantités ν_x, ν_y, ν_z, τ_x, τ_y, τ_z données par les égalités (77) de la première Partie.

Désignons par $\mathfrak{f}$ ce que devient la fonction dissipative $\mathcal{F}$ lorsqu'on y remplace

$$\Delta'_1,\quad \Delta'_2,\quad \Delta'_3,\quad \Gamma'_1,\quad \Gamma'_2,\quad \Gamma'_3$$

par

$$\mathfrak{d}_1,\quad \mathfrak{d}_2,\quad \mathfrak{d}_3,\quad \mathfrak{g}_1,\quad \mathfrak{g}_2,\quad \mathfrak{g}_3.$$

Il est facile de voir que les expressions de

$$[\nu_x]_1^2,\quad [\nu_y]_1^2,\quad [\nu_z]_1^2,\quad [\tau_x]_1^2,\quad [\tau_y]_1^2,\quad [\tau_z]_1^2$$

se tireront des expressions (77) de la première Partie qui donnent

$$\nu_x,\quad \nu_y,\quad \nu_z,\quad \tau_x,\quad \tau_y,\quad \tau_z$$

en remplaçant $\mathfrak{F}$ par f.

En raisonnant comme nous l'avons fait en la 1re série, deuxième Partie, de nos *Recherches sur l'Hydrodynamique* [Chapitre III, § 1, égalités (137)], nous verrons que l'on doit avoir, en tout point de la surface S,

$$(110)\qquad \begin{cases} [\nu_x]_1^2\,\alpha + [\tau_z]_1^2\,\beta + [\tau_y]_1^2\,\gamma = 0, \\ [\tau_z]_1^2\,\alpha + [\nu_y]_1^2\,\beta + [\tau_x]_1^2\,\gamma = 0, \\ [\tau_y]_1^2\,\alpha + [\tau_x]_1^2\,\beta + [\nu_z]_1^2\,\gamma = 0. \end{cases}$$

D'après ce qui vient d'être dit, ces égalités peuvent s'écrire :

$$(111)\qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{d}_1}(\mathfrak{X}_1\alpha + \mathfrak{Y}_1\beta + \mathfrak{Z}_1\gamma)\mathfrak{X}_1 + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{d}_2}(\mathfrak{X}_2\alpha + \mathfrak{Y}_2\beta + \mathfrak{Z}_2\gamma)\mathfrak{X}_2 \\ & \qquad + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{d}_3}(\mathfrak{X}_3\alpha + \mathfrak{Y}_3\beta + \mathfrak{Z}_3\gamma)\mathfrak{X}_3 \\ & \qquad + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{g}_1}[(\mathfrak{X}_2\alpha + \mathfrak{Y}_2\beta + \mathfrak{Z}_2\gamma)\mathfrak{X}_3 + (\mathfrak{X}_3\alpha + \mathfrak{Y}_3\alpha + \mathfrak{Z}_3\gamma)\mathfrak{X}_2] \\ & \qquad + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{g}_2}[(\mathfrak{X}_3\alpha + \mathfrak{Y}_3\beta + \mathfrak{Z}_3\gamma)\mathfrak{X}_1 + (\mathfrak{X}_1\alpha + \mathfrak{Y}_1\beta + \mathfrak{Z}_1\gamma)\mathfrak{X}_3] \\ & \qquad + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{g}_3}[(\mathfrak{X}_1\alpha + \mathfrak{Y}_1\beta + \mathfrak{Z}_1\gamma)\mathfrak{X}_2 + (\mathfrak{X}_2\alpha + \mathfrak{Y}_2\beta + \mathfrak{Z}_2\gamma)\mathfrak{X}_1] = 0, \\ & \qquad \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{d}_1}(\mathfrak{X}_1\alpha + \mathfrak{Y}_1\beta + \mathfrak{Z}_1\gamma)\mathfrak{Y}_1 + \ldots = 0, \\ & \qquad \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{d}_1}(\mathfrak{X}_1\alpha + \mathfrak{Y}_1\beta + \mathfrak{Z}_1\gamma)\mathfrak{Z}_1 + \ldots = 0. \end{aligned} \right.$$

Multiplions respectivement ces égalités par $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}_1$ et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons la première

des égalités

$$
(112) \quad \left\{ \begin{aligned}
&\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{d}_1}(\mathcal{X}_1\alpha+\mathcal{Y}_1\beta+\mathcal{Z}_1\gamma)+\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{g}_3}(\mathcal{X}_2\alpha+\mathcal{Y}_2\beta+\mathcal{Z}_2\gamma)+\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{g}_2}(\mathcal{X}_3\alpha+\mathcal{Y}_3\beta+\mathcal{Z}_3\gamma)=0,\\
&\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{g}_3}(\mathcal{X}_1\alpha+\mathcal{Y}_1\beta+\mathcal{Z}_1\gamma)+\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{d}_2}(\mathcal{X}_2\alpha+\mathcal{Y}_2\beta+\mathcal{Z}_2\gamma)+\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{g}_1}(\mathcal{X}_3\alpha+\mathcal{Y}_3\beta+\mathcal{Z}_3\gamma)=0,\\
&\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{g}_2}(\mathcal{X}_1\alpha+\mathcal{Y}_1\beta+\mathcal{Z}_1\gamma)+\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{g}_1}(\mathcal{X}_2\alpha+\mathcal{Y}_2\beta+\mathcal{Z}_2\gamma)+\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{d}_3}(\mathcal{X}_3\alpha+\mathcal{Y}_3\beta+\mathcal{Z}_3\gamma)=0.
\end{aligned}\right.
$$

Les deux dernières s'obtiennent d'une manière analogue.

Multiplions respectivement les égalités (112) par

$$
\begin{aligned}
&-\mathrm{K}\,\mathcal{M}(\mathcal{X}_1\mathcal{F}+\mathcal{Y}_1\mathcal{G}+\mathcal{Z}_1\mathcal{H}),\\
&-\mathrm{K}\,\mathcal{M}(\mathcal{X}_2\mathcal{F}+\mathcal{Y}_2\mathcal{G}+\mathcal{Z}_2\mathcal{H}),\\
&-\mathrm{K}\,\mathcal{M}(\mathcal{X}_3\mathcal{F}+\mathcal{Y}_3\mathcal{G}+\mathcal{Z}_3\mathcal{H})
\end{aligned}
$$

et ajoutons membre à membre les résultats obtenus, en tenant compte des égalités (109); nous trouvons l'égalité

$$
(113) \qquad \mathfrak{d}_1\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{d}_1}+\mathfrak{d}_2\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{d}_2}+\mathfrak{d}_3\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{d}_3}+\mathfrak{g}_1\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{g}_1}+\mathfrak{g}_2\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{g}_2}+\mathfrak{g}_3\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{g}_3}=0.
$$

Mais la fonction $\mathfrak{f}$ est homogène et du second degré en $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{d}_3$, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$; l'égalité (113) équivaut donc à l'égalité

$$
(114) \qquad \mathfrak{f}=0.
$$

La forme $\mathcal{F}$ est une forme définie positive en Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3, Γ'_1, Γ'_2, Γ'_3; partant, la forme $\mathfrak{f}$ est une forme définie positive en $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{d}_3$, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$ et l'égalité (114) équivaut aux égalités

$$
(115) \qquad \mathfrak{d}_1=0, \quad \mathfrak{d}_2=0, \quad \mathfrak{d}_3=0, \quad \mathfrak{g}_1=0, \quad \mathfrak{g}_2=0, \quad \mathfrak{g}_3=0.
$$

Ces égalités (115) nous permettent évidemment d'écrire

$$
2\mathfrak{d}_1(\mathcal{X}_1\alpha+\mathcal{Y}_1\beta+\mathcal{Z}_1\gamma)+\mathfrak{g}_3(\mathcal{X}_2\alpha+\mathcal{Y}_2\beta+\mathcal{Z}_2\gamma)+\mathfrak{g}_2(\mathcal{X}_3\alpha+\mathcal{Y}_3\beta+\mathcal{Z}_3\gamma)=0.
$$

Dans cette égalité, remplaçons $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{g}_2$ par leurs valeurs tirées des égalités (109); en observant que

$$
(\mathcal{X}_1\alpha+\mathcal{Y}_1\beta+\mathcal{Z}_1\gamma)^2+(\mathcal{X}_2\alpha+\mathcal{Y}_2\beta+\mathcal{Z}_2\gamma)^2+(\mathcal{X}_3\alpha+\mathcal{Y}_3\beta+\mathcal{Z}_3\gamma)^2=1,
$$

nous trouvons l'égalité

$$(116)\quad \begin{aligned} &-\mathrm{K}\,\mathfrak{N}(\mathcal{X}_1\mathcal{F}+\mathcal{Y}_1\mathcal{G}+\mathcal{Z}_1\mathcal{H}) \\ &\quad -\mathrm{K}\,\mathfrak{N}(\mathcal{X}_1\alpha+\mathcal{Y}_1\beta+\mathcal{Z}_1\gamma)\big[\ (\mathcal{X}_1\alpha+\mathcal{Y}_1\beta+\mathcal{Z}_1\gamma)(\mathcal{X}_1\mathcal{F}+\mathcal{Y}_1\mathcal{G}+\mathcal{Z}_1\mathcal{H}) \\ &\qquad\qquad +(\mathcal{X}_2\alpha+\mathcal{Y}_2\beta+\mathcal{Z}_2\gamma)(\mathcal{X}_2\mathcal{F}+\mathcal{Y}_2\mathcal{G}+\mathcal{Z}_2\mathcal{H}) \\ &\qquad\qquad +(\mathcal{X}_3\alpha+\mathcal{Y}_3\beta+\mathcal{Z}_3\gamma)(\mathcal{X}_3\mathcal{F}+\mathcal{Y}_3\mathcal{G}+\mathcal{Z}_3\mathcal{H})\big]=0. \end{aligned}$$

Selon les égalités (109), la quantité entre crochets peut s'écrire

$$\mathfrak{d}_1+\mathfrak{d}_2+\mathfrak{d}_3$$

et elle est nulle par les égalités (115). En tenant compte de l'inégalité (116), nous trouvons la première des égalités

$$(117)\qquad \begin{cases} \mathcal{X}_1\mathcal{F}+\mathcal{Y}_1\mathcal{G}+\mathcal{Z}_1\mathcal{H}=0, \\ \mathcal{X}_2\mathcal{F}+\mathcal{Y}_2\mathcal{G}+\mathcal{Z}_2\mathcal{H}=0, \\ \mathcal{X}_3\mathcal{F}+\mathcal{Y}_3\mathcal{G}+\mathcal{Z}_3\mathcal{H}=0. \end{cases}$$

Les deux autres s'obtiennent d'une manière analogue. Multiplions respectivement ces égalités (117) par $\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Z}_1$ en observant que

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1^2+\mathcal{Y}_1^2+\mathcal{Z}_1^2&=1, \\ \mathcal{X}_1\mathcal{X}_2+\mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_2+\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2&=0, \\ \mathcal{X}_1\mathcal{X}_3+\mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_3+\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_3&=0, \end{aligned}$$

et nous trouvons la première des égalités

$$(118)\qquad \mathcal{F}=0,\qquad \mathcal{G}=0,\qquad \mathcal{H}=0.$$

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue.

Ces résultats, rapprochés de l'inégalité (106) et des indications générales données en la seconde Partie, Chapitre II, § 1 et 2, conduisent au théorème suivant :

Au sein d'un milieu vitreux, doué de viscosité, une onde du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse ne peut se propager; les seules ondes de cet ordre qui puissent persister dans un tel milieu séparent constamment les deux mêmes portions du milieu ; elles sont alors surfaces de discontinuité pour la densité ρ *et pour les six quantités* N_i, T_i; *si le milieu est mauvais conducteur de la chaleur, elles sont également surfaces de discontinuité pour la température* T.

II. — Des ondes du second ordre par rapport aux composantes de la vitesse dans les milieux vitreux doués de viscosité.

Admettons que nous ayons encore l'inégalité (106).

L'onde, du second ordre par rapport à u, v, w, sera, selon ce que nous avons vu (*Recherches sur l'Élasticité*, 2e Partie, Chap. II, § 1 et 2), du troisième ordre par rapport à ξ, η, ζ, du second ordre par rapport à ρ, et au moins du second ordre par rapport à T. Selon les égalités (62) de la première Partie, elle sera du second ordre par rapport aux six quantités N_i, T_i. Les équations (82) de la première Partie exigeront alors que l'on ait, en tout point de la surface S,

$$(119)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left[\frac{\partial \nu_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_z}{\partial y}+\frac{\partial \tau_y}{\partial z}\right]_1^2=0,\\ &\left[\frac{\partial \tau_z}{\partial x}+\frac{\partial \nu_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_x}{\partial z}\right]_1^2=0,\\ &\left[\frac{\partial \tau_y}{\partial x}+\frac{\partial \tau_x}{\partial y}+\frac{\partial \nu_z}{\partial z}\right]_1^2=0. \end{aligned}\right.$$

Formons explicitement ces égalités.

En chaque point de la surface Σ il existe un vecteur $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ tel que

$$(120)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{l^2}\left[\frac{\partial^3\xi}{\partial a^2\,\partial t}\right]_1^2=\frac{1}{lm}\left[\frac{\partial^3\xi}{\partial a\,\partial b\,\partial t}\right]_1^2=\ldots=\mathcal{T}^2\mathcal{F},\\ &\frac{1}{l^2}\left[\frac{\partial^3\eta}{\partial a^2\,\partial t}\right]_1^2=\frac{1}{lm}\left[\frac{\partial^3\eta}{\partial a\,\partial b\,\partial t}\right]_1^2=\ldots=\mathcal{T}^2\mathcal{G},\\ &\frac{1}{l^2}\left[\frac{\partial^3\zeta}{\partial a^2\,\partial t}\right]_1^2=\frac{1}{lm}\left[\frac{\partial^3\zeta}{\partial a\,\partial b\,\partial t}\right]_1^2=\ldots=\mathcal{T}^2\mathcal{H}. \end{aligned}\right.$$

Nous avons

$$\frac{\partial D'_1}{\partial x}=\frac{\partial D'_1}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial D'_1}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}+\frac{\partial D'_1}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}$$

et, en vertu des égalités (24) de la première Partie,

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial D'_1}{\partial x}\right]_1^2=&\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2\left[\frac{\partial^3\xi}{\partial a^2\,\partial t}\right]_1^2+\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)^2\left[\frac{\partial^3\xi}{\partial b^2\,\partial t}\right]_1^2+\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)^2\left[\frac{\partial^3\xi}{\partial c^2\,\partial t}\right]_1^2\\ &+2\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial x}\left[\frac{\partial^3\xi}{\partial b\,\partial c\,\partial t}\right]_1^2+2\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial x}\left[\frac{\partial^3\xi}{\partial c\,\partial a\,\partial t}\right]_1^2+2\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial x}\left[\frac{\partial^3\xi}{\partial a\,\partial b\,\partial t}\right]_1^2.\end{aligned}$$

En vertu des égalités (1) et (120) cette égalité devient la première des égalités

$$
(121)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial D'_1}{\partial x}\right]_1^2 = K^2\mathcal{M}^2\alpha^2\mathcal{F}, \quad \left[\frac{\partial D'_1}{\partial y}\right]_1^2 = K^2\mathcal{M}^2\beta\alpha\mathcal{F}, \quad \left[\frac{\partial D'_1}{\partial z}\right]_1^2 = K^2\mathcal{M}^2\gamma\alpha\mathcal{F},\\
&\left[\frac{\partial D'_2}{\partial x}\right]_1^2 = K^2\mathcal{M}^2\alpha\beta\mathcal{G}, \qquad \ldots;\\
&\qquad\qquad \left[\frac{\partial G'_1}{\partial x}\right]_1^2 = K^2\mathcal{M}^2\alpha(\beta\mathcal{H}+\gamma\mathcal{G}),\\
&\qquad\qquad \left[\frac{\partial G'_1}{\partial y}\right]_1^2 = K^2\mathcal{M}^2\beta(\beta\mathcal{H}+\gamma\mathcal{G}),\\
&\qquad\qquad \left[\frac{\partial G'_1}{\partial z}\right]_1^2 = K^2\mathcal{M}^2\gamma(\beta\mathcal{H}+\gamma\mathcal{G}),\\
&\qquad\qquad \left[\frac{\partial G'_2}{\partial x}\right]_1^2 = K^2\mathcal{M}^2\alpha(\gamma\mathcal{F}+\alpha\mathcal{H}),\\
&\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Les autres s'établissent d'une manière analogue.

Les égalités (33) de la première Partie donnent

$$
(122)\quad \left\{
\begin{aligned}
\left[\frac{\partial \Delta'_1}{\partial x}\right]_1^2 = {}& \mathcal{A}_1^2\left[\frac{\partial D'_1}{\partial x}\right]_1^2 + \mathcal{J}_1^2\left[\frac{\partial D'_2}{\partial x}\right]_1^2 + \mathcal{B}_1^2\left[\frac{\partial D'_3}{\partial x}\right]_1^2\\
&+ \mathcal{J}_1\mathcal{B}_1\left[\frac{\partial G'_1}{\partial x}\right]_1^2 + \mathcal{B}_1\mathcal{A}_1\left[\frac{\partial G'_2}{\partial x}\right]_1^2 + \mathcal{A}_1\mathcal{J}_1\left[\frac{\partial G'_3}{\partial x}\right]_1^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Posons

$$
(123)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{D}_1 &= (\alpha\mathcal{A}_1+\beta\mathcal{J}_1+\gamma\mathcal{B}_1)(\mathcal{A}_1\mathcal{F}+\mathcal{J}_1\mathcal{G}+\mathcal{B}_1\mathcal{H}),\\
\mathfrak{D}_2 &= (\alpha\mathcal{A}_2+\beta\mathcal{J}_2+\gamma\mathcal{B}_2)(\mathcal{A}_2\mathcal{F}+\mathcal{J}_2\mathcal{G}+\mathcal{B}_2\mathcal{H}),\\
\mathfrak{D}_3 &= (\alpha\mathcal{A}_3+\beta\mathcal{J}_3+\gamma\mathcal{B}_3)(\mathcal{A}_3\mathcal{F}+\mathcal{J}_3\mathcal{G}+\mathcal{B}_3\mathcal{H}),\\
\mathfrak{G}_1 &= \quad(\alpha\mathcal{A}_2+\beta\mathcal{J}_2+\gamma\mathcal{B}_2)(\mathcal{A}_3\mathcal{F}+\mathcal{J}_3\mathcal{G}+\mathcal{B}_3\mathcal{H})\\
&\quad+(\alpha\mathcal{A}_3+\beta\mathcal{J}_3+\gamma\mathcal{B}_3)(\mathcal{A}_2\mathcal{F}+\mathcal{J}_2\mathcal{G}+\mathcal{B}_2\mathcal{H}),\\
\mathfrak{G}_2 &= \quad(\alpha\mathcal{A}_3+\beta\mathcal{J}_3+\gamma\mathcal{B}_3)(\mathcal{A}_1\mathcal{F}+\mathcal{J}_1\mathcal{G}+\mathcal{B}_1\mathcal{H})\\
&\quad+(\alpha\mathcal{A}_1+\beta\mathcal{J}_1+\gamma\mathcal{B}_1)(\mathcal{A}_3\mathcal{F}+\mathcal{J}_3\mathcal{G}+\mathcal{B}_3\mathcal{H}),\\
\mathfrak{G}_3 &= \quad(\alpha\mathcal{A}_1+\beta\mathcal{J}_1+\gamma\mathcal{B}_1)(\mathcal{A}_2\mathcal{F}+\mathcal{J}_2\mathcal{G}+\mathcal{B}_2\mathcal{H})\\
&\quad+(\alpha\mathcal{A}_2+\beta\mathcal{J}_2+\gamma\mathcal{B}_2)(\mathcal{A}_1\mathcal{F}+\mathcal{J}_1\mathcal{G}+\mathcal{B}_1\mathcal{H}).
\end{aligned}
\right.
$$

Les égalités (122) deviendront, en vertu des égalités (121),

$$(124)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[\frac{\partial \Delta'_1}{\partial x}\right]_1^2 = K^2 \mathfrak{M}^2 \alpha \mathfrak{D}_1, \quad \left[\frac{\partial \Delta'_1}{\partial y}\right]_1^2 = K^2 \mathfrak{M}^2 \beta \mathfrak{D}_1, \quad \left[\frac{\partial \Delta'_1}{\partial z}\right]_1^2 = K^2 \mathfrak{M}^2 \gamma \mathfrak{D}_1, \\ &\left[\frac{\partial \Delta'_2}{\partial x}\right]_1^2 = K^2 \mathfrak{M}^2 \alpha \mathfrak{D}_2, \quad \dots, \\ &\left[\frac{\partial \Gamma'_1}{\partial x}\right]_1^2 = K^2 \mathfrak{M}^2 \alpha \mathfrak{E}_1, \quad \dots. \end{aligned}\right.$$

Or, en vertu des égalités (77) de la première Partie, la première des égalités (119) devient

$$(125)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \Delta_1'^2} \left\{ \mathfrak{X}_1 \left[\frac{\partial \Delta'_1}{\partial x}\right]_1^2 + \mathfrak{Y}_1 \left[\frac{\partial \Delta'_1}{\partial y}\right]_1^2 + \mathfrak{Z}_1 \left[\frac{\partial \Delta'_1}{\partial z}\right]_1^2 \mathfrak{X}_1 \right\} + \text{etc.} \\ &+ \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \Delta'_2 \partial \Delta'_3} \left\{ \left(\mathfrak{X}_3 \left[\frac{\partial \Delta'_2}{\partial x}\right]_1^2 + \mathfrak{Y}_3 \left[\frac{\partial \Delta'_2}{\partial y}\right]_1^2 + \mathfrak{Z}_3 \left[\frac{\partial \Delta'_2}{\partial z}\right]_1^2\right) \mathfrak{X}_2 \right. \\ &\qquad \left. + \left(\mathfrak{X}_2 \left[\frac{\partial \Delta'_3}{\partial x}\right]_1^2 + \mathfrak{Y}_2 \left[\frac{\partial \Delta'_3}{\partial y}\right]_1^2 + \mathfrak{Z}_2 \left[\frac{\partial \Delta'_3}{\partial z}\right]_1^2\right) \mathfrak{X}_3 \right\} + \text{etc.} \\ &+ \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \Gamma_1'^2} \left\{ \left(\mathfrak{X}_3 \left[\frac{\partial \Gamma'_1}{\partial x}\right]_1^2 + \mathfrak{Y}_3 \left[\frac{\partial \Gamma'_1}{\partial y}\right]_1^2 + \mathfrak{Z}_3 \left[\frac{\partial \Gamma'_1}{\partial z}\right]_1^2\right) \mathfrak{X}_2 \right. \\ &\qquad \left. + \left(\mathfrak{X}_2 \left[\frac{\partial \Gamma'_1}{\partial x}\right]_1^2 + \mathfrak{Y}_2 \left[\frac{\partial \Gamma'_1}{\partial y}\right]_1^2 + \mathfrak{Z}_2 \left[\frac{\partial \Gamma'_1}{\partial z}\right]_1^2\right) \mathfrak{X}_3 \right\} + \text{etc.} \\ &+ \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \Gamma'_2 \partial \Gamma'_3} \left\{ \left(\mathfrak{X}_2 \left[\frac{\partial \Gamma'_2}{\partial x}\right]_1^2 + \mathfrak{Y}_2 \left[\frac{\partial \Gamma'_2}{\partial y}\right]_1^2 + \mathfrak{Z}_2 \left[\frac{\partial \Gamma'_2}{\partial z}\right]_1^2\right) \right. \\ &\qquad + \left(\mathfrak{X}_3 \left[\frac{\partial \Gamma'_3}{\partial x}\right]_1^2 + \mathfrak{Y}_3 \left[\frac{\partial \Gamma'_3}{\partial y}\right]_1^2 + \mathfrak{Z}_3 \left[\frac{\partial \Gamma'_3}{\partial z}\right]_1^2\right) \mathfrak{X}_1 \\ &\qquad + \left(\mathfrak{X}_1 \left[\frac{\partial \Gamma'_2}{\partial x}\right]_1^2 + \mathfrak{Y}_1 \left[\frac{\partial \Gamma'_2}{\partial y}\right]_1^2 + \mathfrak{Z}_1 \left[\frac{\partial \Gamma'_2}{\partial z}\right]_1^2\right) \mathfrak{X}_2 \\ &\qquad \left. + \left(\mathfrak{X}_1 \left[\frac{\partial \Gamma'_2}{\partial x}\right]_1^2 + \mathfrak{Y}_1 \left[\frac{\partial \Gamma'_3}{\partial y}\right]_1^2 + \mathfrak{Z}_1 \left[\frac{\partial \Gamma'_3}{\partial z}\right]_1^2\right) \mathfrak{X}_3 \right\} + \text{etc.} \\ &+ \sum_{ij} \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \Delta'_i \partial \Gamma'_j} \left\{ \left(\mathfrak{X}_i \left[\frac{\partial \Gamma'_j}{\partial x}\right]_1^2 + \mathfrak{Y}_i \left[\frac{\partial \Gamma'_j}{\partial y}\right]_1^2 + \mathfrak{Z}_i \left[\frac{\partial \Gamma'_j}{\partial z}\right]_1^2\right) \mathfrak{X}_i \right. \\ &\qquad + \left(\mathfrak{X}_{j'} \left[\frac{\partial \Delta'_i}{\partial x}\right]_1^2 + \mathfrak{Y}_{j'} \left[\frac{\partial \Delta'_i}{\partial y}\right]_1^2 + \mathfrak{Z}_{j'} \left[\frac{\partial \Delta'_i}{\partial z}\right]_1^2\right) \mathfrak{X}_{j''} \\ &\qquad \left. + \left(\mathfrak{X}_{j''} \left[\frac{\partial \Delta'_i}{\partial x}\right]_1^2 + \mathfrak{Y}_{j''} \left[\frac{\partial \Delta'_i}{\partial y}\right]_1^2 + \mathfrak{Z}_{j''} \left[\frac{\partial \Delta'_i}{\partial z}\right]_1^2\right) \mathfrak{X}_{j'} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Dans cette égalité, chaque signe *etc.* remplace deux termes qui se déduisent du terme explicitement écrit avant ce signe en permutant

les indices 1, 2, 3. L'indice i est un quelconque des indices 1, 2, 3. Les indices j, j', j'' sont les indices 1, 2, 3, pris dans un ordre quelconque.

Les égalités (124) et (125) donnent, après suppression du facteur $K^2 \mathfrak{M}^2$ qui, en vertu de l'inégalité (106), diffère de o, la première égalité

$$(126)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \Delta_1'^2}(\alpha \mathfrak{X}_1 + \beta \mathfrak{Y}_1 + \gamma \mathfrak{Z}_1)\mathfrak{X}_1 \mathfrak{D}_1 + \text{etc.} \\
&+ \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \Delta_2' \partial \Delta_3'}[(\alpha \mathfrak{X}_3 + \beta \mathfrak{Y}_3 + \gamma \mathfrak{Z}_3)\mathfrak{X}_3 \mathfrak{D}_2 + (\alpha \mathfrak{X}_2 + \beta \mathfrak{Y}_2 + \gamma \mathfrak{Z}_2)\mathfrak{X}_2 \mathfrak{D}_3] + \text{etc.} \\
&+ \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \Gamma_1'^2}[(\alpha \mathfrak{X}_3 + \beta \mathfrak{Y}_3 + \gamma \mathfrak{Z}_3)\mathfrak{X}_2 + (\alpha \mathfrak{X}_2 + \beta \mathfrak{Y}_2 + \gamma \mathfrak{Z}_2)\mathfrak{X}_3]\mathfrak{G}_1 + \text{etc.} \\
&+ \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \Gamma_2' \partial \Gamma_3'}\{ [(\alpha \mathfrak{X}_1 + \beta \mathfrak{Y}_1 + \gamma \mathfrak{Z}_1)\mathfrak{X}_2 + (\alpha \mathfrak{X}_2 + \beta \mathfrak{Y}_2 + \gamma \mathfrak{Z}_2)\mathfrak{X}_1]\mathfrak{G}_2 \\
&\qquad + [(\alpha \mathfrak{X}_3 + \beta \mathfrak{Y}_3 + \gamma \mathfrak{Z}_3)\mathfrak{X}_1 + (\alpha \mathfrak{X}_1 + \beta \mathfrak{Y}_1 + \gamma \mathfrak{Z}_1)\mathfrak{X}_3]\mathfrak{G}_3 \} + \text{etc.} \\
&+ \sum_{ij} \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \Delta_i' \partial \Gamma_j'}\{(\alpha \mathfrak{X}_i + \beta \mathfrak{Y}_i + \gamma \mathfrak{Z}_i)\mathfrak{X}\mathfrak{G}_{ij} \\
&\qquad + [(\alpha \mathfrak{X}_{j'} + \beta \mathfrak{Y}_{j'} + \gamma \mathfrak{Z}_{j'})\mathfrak{X}_{j''} + (\alpha \mathfrak{X}_{j''} + \beta \mathfrak{Y}_{j''} + \gamma \mathfrak{Z}_{j''})\mathfrak{X}_{j'}]\mathfrak{D}_i\} = 0, \\
&\qquad\qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \Delta_1'^2}(\alpha \mathfrak{X}_1 + \beta \mathfrak{Y}_1 + \gamma \mathfrak{Z}_1)\mathfrak{Y}_1 \mathfrak{D}_1 + \ldots\ldots = 0, \\
&\qquad\qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \Delta_1'^2}(\alpha \mathfrak{X}_1 + \beta \mathfrak{Y}_1 + \gamma \mathfrak{Z}_1)\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{D}_1 + \ldots\ldots = 0.
\end{aligned}\right.$$

Les deux autres se tirent d'une manière analogue des deux dernières égalités (119).

Multiplions respectivement ces égalités (126) par $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{K}$ et ajoutons-les membre à membre en tenant compte des égalités (123); nous trouvons l'égalité

$$(127)\quad \left(\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \Delta_1'}\mathfrak{D}_1 + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \Delta_2'}\mathfrak{D}_2 + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \Delta_3'}\mathfrak{D}_3 + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \Gamma_1'}\mathfrak{G}_1 + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \Gamma_2'}\mathfrak{G}_2 + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \Gamma_3'}\mathfrak{G}_3\right)^{(2)} = 0,$$

où (2) représente un carré symbolique.

Mais la fonction dissipative $\mathfrak{f}$ est une forme quadratique en Δ_1', Δ_2', Δ_3', Γ_1', Γ_2', Γ_3'; ses dérivées partielles du second ordre par rapport à ces six variables sont donc indépendantes de ces variables. Dès lors, si l'on désigne par $\mathfrak{f}$ ce que devient la forme $\mathfrak{f}$ lorsque aux va-

riables

$$\Delta'_1, \quad \Delta'_2, \quad \Delta'_3, \quad \Gamma'_1, \quad \Gamma'_2, \quad \Gamma'_3$$

on substitue les variables

$$\mathfrak{D}_1, \quad \mathfrak{D}_2, \quad \mathfrak{D}_3, \quad \mathfrak{G}_1, \quad \mathfrak{G}_2, \quad \mathfrak{G}_3,$$

on aura

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \Delta_i'^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{D}_i^2}, \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \Gamma_i'^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{G}_i^2},$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \Delta'_i \partial \Delta'_j} = \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{D}_i \partial \mathfrak{D}_j}, \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \Gamma'_i \partial \Delta'_j} = \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{G}_i \partial \mathfrak{D}_j}, \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \Gamma'_i \partial \Gamma'_j} = \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{G}_i \partial \mathfrak{G}_j},$$

et l'égalité (127) deviendra

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{D}_1}\mathfrak{D}_1 + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{D}_2}\mathfrak{D}_2 + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{D}_3}\mathfrak{D}_3 + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{G}_1}\mathfrak{G}_1 + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{G}_2}\mathfrak{G}_2 + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{G}_3}\mathfrak{G}_3\right)^{(2)} = 0$$

ou bien, en vertu du théorème d'Euler,

$$\mathfrak{f} = 0.$$

Mais la forme $\mathfrak{F}$ est une forme définie positive en $\Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3, \Gamma'_1, \Gamma'_2, \Gamma'_3$; la forme $\mathfrak{f}$ est donc une forme définie positive en $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3$, et l'égalité précédente entraine les égalités

$$(128) \qquad \mathfrak{D}_1 = 0, \quad \mathfrak{D}_2 = 0, \quad \mathfrak{D}_3 = 0, \quad \mathfrak{G}_1 = 0, \quad \mathfrak{G}_2 = 0, \quad \mathfrak{G}_3 = 0.$$

Ces égalités (128) permettent d'écrire l'égalité

$$2(\alpha\mathfrak{X}_1 + \beta\mathfrak{Y}_1 + \gamma\mathfrak{Z}_1)\mathfrak{D}_1 + (\alpha\mathfrak{X}_2 + \beta\mathfrak{Y}_2 + \gamma\mathfrak{Z}_2)\mathfrak{G}_3 + (\alpha\mathfrak{X}_3 + \beta\mathfrak{Y}_3 + \gamma\mathfrak{Z}_3)\mathfrak{G}_2 = 0.$$

En vertu de l'égalité (123) et de l'égalité

$$(\alpha\mathfrak{X}_1 + \beta\mathfrak{Y}_1 + \gamma\mathfrak{Z}_1)^2 + (\alpha\mathfrak{X}_2 + \beta\mathfrak{Y}_2 + \gamma\mathfrak{Z}_2)^2 + (\alpha\mathfrak{X}_3 + \beta\mathfrak{Y}_3 + \gamma\mathfrak{Z}_3)^2 = 1,$$

l'égalité précédente devient

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{X}_1\mathcal{F} + \mathfrak{Y}_1\mathcal{G} + \mathfrak{Z}_1\mathcal{H} \\
&\quad + (\alpha\mathfrak{X}_1 + \beta\mathfrak{Y}_1 + \gamma\mathfrak{Z}_1)[(\alpha\mathfrak{X}_1 + \beta\mathfrak{Y}_1 + \gamma\mathfrak{Z}_1)(\mathfrak{X}_1\mathcal{F} + \mathfrak{Y}_1\mathcal{G} + \mathfrak{Z}_1\mathcal{H}) \\
&\qquad + (\alpha\mathfrak{X}_2 + \beta\mathfrak{Y}_2 + \gamma\mathfrak{Z}_2)(\mathfrak{X}_2\mathcal{F} + \mathfrak{Y}_2\mathcal{G} + \mathfrak{Z}_2\mathcal{H}) \\
&\qquad + (\alpha\mathfrak{X}_3 + \beta\mathfrak{Y}_3 + \gamma\mathfrak{Z}_3)(\mathfrak{X}_3\mathcal{F} + \mathfrak{Y}_3\mathcal{G} + \mathfrak{Z}_3\mathcal{H})] = 0.
\end{aligned}$$

Mais la quantité entre [ ], égale à $(\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2 + \mathfrak{D}_3)$ en vertu des égalités (123), est nulle d'après les égalités (128); nous obtenons donc la première des égalités

$$(129) \quad \begin{cases} \mathfrak{X}_1 \mathcal{F} + \mathfrak{Y}_1 \mathcal{G} + \mathfrak{Z}_1 \mathcal{H} = 0, \\ \mathfrak{X}_2 \mathcal{F} + \mathfrak{Y}_2 \mathcal{G} + \mathfrak{Z}_2 \mathcal{H} = 0, \\ \mathfrak{X}_3 \mathcal{F} + \mathfrak{Y}_3 \mathcal{G} + \mathfrak{Z}_3 \mathcal{H} = 0. \end{cases}$$

Les deux autres égalités (129) se démontrent d'une manière analogue.

Ces égalités (129) donnent sans peine, en tout point de la surface S,

$$\mathcal{F} = 0, \qquad \mathcal{G} = 0, \qquad \mathcal{H} = 0.$$

Donc, *au sein d'un milieu vitreux, une onde du second ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse ne peut avoir une vitesse de propagation* $\mathfrak{N}$ *différente de* 0. *Les seules ondes de cet ordre qui puissent subsister en un tel milieu séparent constamment les deux mêmes portions du milieu; elles sont alors surfaces de discontinuité pour la densité* ρ *et pour les quantités* N_i, T_i; *en outre, si le milieu est mauvais conducteur, elles sont surfaces de discontinuité pour la température* T.

Ainsi sont étendues aux milieux vitreux doués de viscosité les propositions que nous avions démontrées pour les fluides (*Recherches sur l'Hydrodynamique*, 1re série, 1re Partie, Chapitre III).

De plus, pour démontrer ces propositions, nous ne nous sommes nullement servi des symétries particulières qui caractérisent les milieux vitreux; par exemple, en ce qui concerne les actions de viscosité, nous avons supposé seulement que la fonction dissipative $\mathcal{F}$ était une forme quadratique définie de Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3, Γ'_1, Γ'_2, Γ'_3, ce qui est également vrai pour les milieux vitreux et pour les milieux cristallisés. Nous pouvons donc affirmer qu'*au sein d'un milieu affecté de viscosité, qu'il soit fluide ou solide, vitreux ou cristallisé, aucune onde ne peut se propager. Toute onde persistante sépare indéfiniment les deux mêmes parties du milieu. Si une telle onde est d'ordre n par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse, elle est d'ordre* $(n-1)$ *par rapport à la densité* ρ *et aux quantités* N_i, T_i. *Par rapport à la température* T, *elle est d'ordre n ou d'ordre* $(n-1)$, *selon que le milieu est conducteur de la chaleur ou qu'il est privé de conductibilité.*

III. — Intersection d'une onde-cloison et de la surface libre du milieu (¹).

Dans les milieux fluides ou élastiques, qui sont doués de viscosité, nous avons montré que les seules ondes possibles sont des ondes qui séparent constamment les deux mêmes masses fluides; à ces ondes, nous donnerons le nom d'*ondes-cloisons* parce que, semblables à des cloisons étanches, elles partagent la masse fluide en *cellules* telles qu'aucun échange de matière ne se produise d'une cellule à l'autre.

Nous allons, au présent paragraphe, porter notre attention sur celles de ces ondes qui sont du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse, c'est-à-dire sur celles qui ont été étudiées au paragraphe I; nous allons mettre en évidence une importante propriété de la ligne suivant laquelle une telle onde coupe la surface libre qui termine le milieu.

Au moyen des six quantités

$$N_x+\nu_x,\quad N_y+\nu_y,\quad N_z+\nu_z,\quad T_x+\tau_x,\quad T_y+\tau_y,\quad T_z+\tau_z,$$

formons l'équation

$$(130)\qquad \begin{aligned}&(N_x+\nu_x)X^2+(N_y+\nu_y)Y^2+(N_z+\nu_z)Z^2\\ &+2(T_x+\tau_x)YZ+2(T_y+\tau_y)ZX+2(T_z+\tau_z)XY=1,\end{aligned}$$

qui représente, en chaque point du milieu et à chaque instant, la *quadrique des pressions*.

En général, la forme et l'orientation de la quadrique des pressions varient d'une manière continue d'un point à l'autre du milieu; mais cette forme et cette orientation varient d'une façon brusque si l'on vient à traverser une *onde-cloison* qui soit du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse.

Soit M un point pris sur une *onde-cloison;* la quadrique des pressions tend vers deux formes limites distinctes Q_1, Q_2, selon que l'on s'approche du point M en demeurant du côté 1 de l'onde ou du côté 2. Entre ces deux formes limites, existe une relation. En effet,

---

(¹) *Sur les ondes-cloisons* (*Comptes rendus*), t. CXXXVII, p. 237, Séance du 27 juillet 1903).

au point M, on doit avoir les égalités

$$(131)\quad \begin{cases} (N_x+\nu_x)_1\alpha+(T_z+\tau_z)_1\beta+(T_y+\tau_y)_1\gamma=(N_x+\nu_x)_2\alpha+(T_z+\tau_z)_2\beta+(T_y+\tau_y)_2\gamma, \\ (T_z+\tau_z)_1\alpha+(N_y+\nu_y)_1\beta+(T_x+\tau_x)_1\gamma=(T_z+\tau_z)_2\alpha+(N_y+\nu_y)_2\beta+(T_x+\tau_x)_2\alpha, \\ (T_y+\tau_y)_1\alpha+(T_x+\tau_x)_1\beta+(N_z+\nu_z)_1\gamma=(T_y+\tau_y)_2\alpha+(T_x+\tau_x)_2\beta+(N_z+\nu_z)_2\gamma, \end{cases}$$

égalités qui sont le fondement des raisonnements développés au paragraphe I.

Ces égalités signifient que *le plan diamétral conjugué à la direction* (α, β, γ) *de la normale à l'onde a même orientation dans les deux quadriques limites* Q_1, Q_2.

La normale à l'onde ne coïncide, en général, avec un des axes principaux ni pour la quadrique Q_1, ni pour la quadrique Q_2; d'ailleurs, si elle était axe principal de l'une de ces quadriques, elle serait forcément, en vertu du théorème précédent, axe principal de l'autre.

Imaginons que la surface libre du milieu supporte une pression normale Π; la normale à cette surface, dirigée vers l'intérieur du milieu, fait avec les axes de coordonnées des angles dont les cosinus seront désignés par λ, μ, ν. Nous aurons alors, en tout point de la surface libre,

$$(132)\quad \begin{cases} (N_x+\nu_x-\Pi)\lambda+(T_z+\tau_z)\mu+(T_y+\tau_y)\nu=0, \\ (T_z+\tau_z)\lambda+(N_y+\nu_y-\Pi)\mu+(T_x+\tau_x)\nu=0, \\ (T_y+\tau_y)\lambda+(T_x+\tau_x)\mu+(N_z+\nu_z-\Pi)\nu=0. \end{cases}$$

De ces égalités on peut tirer, entre autres conséquences, la proposition suivante :

En chaque point de la surface libre, la normale à cette surface trace l'un des axes principaux de la quadrique des pressions qui se rapporte à ce point.

Considérons maintenant la ligne L, intersection de la surface libre par une *onde-cloison;* de part et d'autre de l'*onde-cloison,* la quadrique des pressions n'a pas, en général, ses axes principaux orientés de la même manière; la normale à la surface libre subira donc, en général, un changement brusque d'orientation à la traversée de la ligne L; d'où la proposition suivante :

L'intersection d'une onde-cloison du premier ordre par rapport à la vitesse et de la surface libre qui limite le milieu est une arête de cette dernière surface.

Cette arête peut, d'ailleurs, se dessiner en saillie ou en creux.

Nous avons déjà signalé (¹) l'analogie des *ondes-cloisons* qui peuvent se former au sein des fluides visqueux avec la division en cellules que M. H. Bénard (²) a observée au sein de liquides inégalement échauffés; cette analogie est complétée par le théorème précédent; en même temps, nous venons de reconnaître qu'une telle division en cellules peut se produire au sein de tous les milieux affectés de viscosité, qu'ils soient fluides ou solides, vitreux ou cristallisés; et, en effet, des phénomènes analogues à ceux que M. H. Bénard a étudiés ont été observés par M. J. Cartaud (³) dans les milieux visqueux les plus divers.

On remarquera que les propositions développées en ce Chapitre et dans le Chapitre précédent permettraient de reprendre, au sujet des milieux élastiques, tout ce que nous avons dit de la propagation des *quasi-ondes* au sein des fluides (⁴).

CHAPITRE III.

CONTINUITÉ DE L'ÉTAT LIQUIDE ET DE L'ÉTAT VITREUX.

Que faut-il entendre en disant qu'un solide vitreux, sans être très compressible, est très aisément déformable? Nous donnerons à ces mots le sens suivant :

Les propriétés du milieu pris dans un état autre que l'état initial

(¹) *Recherches sur l'Hydrodynamique*, 2ᵉ Partie, Conclusion (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2ᵉ série, t. IV, 1902).

(²) H. BÉNARD, *Journal de Physique*, 2ᵉ série, t. IX, 1900, p. 513; t. X, 1901, p. 254.

(³) *Revue générale des Sciences*, 14ᵉ année, 1903, p. 114.

(⁴) *Recherches sur l'Hydrodynamique*, 2ᵉ Partie (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2ᵉ série, t. V, 1903).

changent notablement si l'on vient à changer la densité en chaque point; mais, si l'on déforme les divers éléments sans en changer la densité, les propriétés du milieu varient extrêmement peu.

Suivons les conséquences de cette définition.

Les propriétés statiques du milieu sont entièrement définies par la forme de son *potentiel interne;* la connaissance de cette forme ne suffit plus pour fixer les propriétés dynamiques du milieu : il faut y joindre la forme de la *fonction dissipative.*

La forme du potentiel interne dépend de deux fonctions, les fonctions Φ et Ψ comme l'enseigne l'égalité (41) de la première Partie. Suivons, en chacune de ces deux fonctions, l'influence de notre définition.

La fonction Φ dépend, en général, de la température T et des trois quantités J_1, J_2, J_3. Si un changement de forme de l'élément auquel elle se rapporte devait la laisser rigoureusement invariable lorsqu'il n'entraîne aucun changement de température ni de densité, la grandeur Φ serait une fonction des seules variables ρ et T; *notre définition exige donc que la fonction Φ soit de la forme*

$$\Phi = \zeta(\rho, T) + \varphi(T, J_1, J_2, J_3), \tag{133}$$

la fonction $\zeta(\rho, T)$ ayant une valeur notable, tandis que la fonction $\varphi(T, J_1, J_2, J_3)$ a une valeur extrêmement petite.

Considérons maintenant la fonction Ψ, dont dépend l'action mutuelle de deux éléments; nous avons énuméré en (43) de la première Partie les éléments dont cette fonction peut dépendre. Si elle devait demeurer rigoureusement invariable dans toute modification qui déforme les deux éléments sans altérer ni leur densité, ni leur position relative, elle ne pourrait dépendre que des densités ρ et ρ' des deux éléments et de leur distance mutuelle r; on aurait alors

$$\Psi = \psi(\rho, \rho', r).$$

D'après notre définition, cette égalité ne doit être qu'une égalité approchée et *l'on doit avoir*

$$\Psi = \psi(\rho, \rho', r) + \chi, \tag{134}$$

la fonction ψ *ayant une valeur notable, tandis que la fonction* χ, *qui peut dépendre de tous les éléments énumérés en* (43) *de la première Partie, a toujours une très petite valeur.*

D'après les égalités (41) de la première Partie, (133) et (134), *le potentiel interne du système s'exprimera par l'égalité*

$$(135) \qquad \mathfrak{F} = \int \zeta(\rho, T)\, dm + \frac{1}{2}\int\int \psi(\rho, \rho', r)\, dm\, dm' + \int \varphi(T, J_1, J_2, J_3)\, dm + \frac{1}{2}\int\int \chi\, dm\, dm'.$$

Les termes de la seconde ligne ont, en toute circonstance, des valeurs très petites. Les termes de la première ligne, qui seuls ont des valeurs notables, reproduisent le potentiel interne d'une masse fluide, tel que le présente l'égalité (66) de la première Partie de nos *Recherches sur l'Hydrodynamique*.

Dès lors, il est bien évident, sans aucun calcul, que les milieux étudiés vont nous redonner, mais à titre de lois approchées, toutes les propositions qui découlaient rigoureusement, pour les fluides, de la seule forme de leur potentiel interne.

Si, comme nous l'avons fait en la première Partie de nos *Recherches sur l'Hydrodynamique* [égalités (67) et (75)], nous posons

$$(136) \qquad \begin{cases} A = \int \dfrac{\partial\psi(\rho, \rho, r)}{\partial\rho}\, dm', \\ \Pi = \rho^2 \dfrac{\partial\zeta(\rho, T)}{\partial\rho} - \rho^2 A, \end{cases}$$

nous aurons les ÉGALITÉS APPROCHÉES

$$(137) \qquad \begin{cases} N_x = N_y = N_z = \Pi, \\ T_x = T_y = T_z = 0. \end{cases}$$

Si nous comparons en particulier ces égalités aux égalités (8) de la première Partie de ces *Recherches sur l'Élasticité,* qui conviennent à un milieu peu écarté de l'état initial, nous parvenons au théorème suivant :

En un milieu très aisément déformable qui est peu écarté de son état initial, la fonction M(T) *a des valeurs très petites par rapport aux valeurs de* Λ(T).

Examinons maintenant la forme qu'il convient d'attribuer à la fonction dissipative en un milieu très aisément déformable.

Si les propriétés du milieu étaient absolument indépendantes de la déformation subie par chaque élément, mais seulement de la variation de densité à partir de l'état initial, la valeur de la fonction dissipative devrait rester absolument la même quel que soit le trièdre trirectangle dont les arêtes sont les trois axes principaux de dilatation de l'élément considéré. Sa forme se déterminerait alors par les raisonnements que nous avons suivis au Chapitre I, § II de la première Partie de ces *Recherches sur l'Élasticité*. Cette forme, analogue à la forme (17) de cette première Partie, serait

$$\begin{aligned} \mathfrak{s} = {} & \frac{\lambda(\rho, T)}{2}(D'_1 + D'_2 + D'_3)^2 \\ & + \frac{\mu(\rho, T)}{2}(D'^2_1 + D'^2_2 + D'^2_3 + 2G'^2_1 + 2G'^2_2 + 2G'^2_3). \end{aligned}$$

Mais les propriétés du milieu éprouvent une variation non nulle, bien que très faible, dans une déformation qui laisse invariables la température et la densité; l'égalité précédente doit donc être non pas rigoureuse, mais approchée; en toute rigueur, *la fonction dissipative doit s'obtenir en posant*

$$(138) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{s} = {} & \frac{\lambda(\rho, T)}{2}(D'_1 + D'_2 + D'_3)^2 \\ & + \frac{\mu(\rho, T)}{2}(D'^2_1 + D'^2_2 + D'^2_3 + 2G'^2_1 + 2G'^2_2 + 2G'^2_3) + \mathfrak{f}. \end{aligned}$$

$\mathfrak{f}$ *est une expression donnée par une égalité de même forme que l'égalité* (74), *de la première Partie, mais dont la valeur est toujours très petite.*

Dire que les propriétés du milieu changent très peu lorsque l'on déforme les divers éléments sans en changer la densité, ni la température, c'est évidemment supposer, comme nous venons de le faire, que la valeur de la fonction dissipative à l'instant t dépend de la température et de la densité de chaque élément à cet instant, mais est presque indépendante de la déformation de l'élément. Ce n'est pas

forcément admettre que le travail de viscosité dans le temps dt est sensiblement nul si la modification du système pendant ce temps ne fait point changer la densité de divers éléments. On conçoit que l'on puisse faire la première hypothèse sans faire la seconde; en d'autres termes, *on conçoit que* $\mathfrak{F}$ *puisse prendre la forme* (138) *sans que la fonction* $\mu(\rho, T)$ *soit négligeable devant* $\lambda(\rho, T)$.

Ainsi *un milieu solide, vitreux, très déformable, mais non très compressible, obéit approximativement aux lois qu'il est d'usage d'admettre en un liquide visqueux. Le liquide visqueux représente la forme limite d'un tel milieu très déformable.*

Cette manière de voir concorde avec celle à laquelle les expérimentateurs sont conduits par des recherches de diverses natures.

On soupçonnait depuis longtemps et l'on sait aujourd'hui d'une manière certaine, grâce surtout aux travaux de M. Tammann, que beaucoup de corps, liquides et peu visqueux à une certaine température, deviennent de plus en plus visqueux lorsque la température s'abaisse, et se transforment finalement en solides vitreux. Cette *continuité entre l'état liquide et l'état vitreux* sera parfaitement conforme aux formules précédentes, si l'on suppose que les fonctions φ, χ, f, très petites lorsque la température a une valeur suffisamment élevée, augmentent et prennent des valeurs très notables lorsque la température s'abaisse à un certain degré.

Un corps dont chaque élément est supposé dans un état entièrement défini par la connaissance de la densité ρ et de la température T est un corps *isotrope par définition;* donc, *un fluide proprement dit et anisotrope serait un non-sens.* Il n'en est pas de même pour un corps vitreux très aisément déformable; ce corps est forcément isotrope dans l'état initial; mais, lorsqu'il a été déformé, il n'est plus forcément isotrope; il peut agir sur la lumière comme un corps doué d'une faible biréfringence. Or, les recherches de Maxwell et d'une foule d'autres expérimentateurs ont mis cette vérité hors de contestation : Lorsqu'un liquide, même très peu visqueux, est en mouvement, il est biréfringent. La biréfringence des liquides en mouvement s'accorde donc avec les théories développées au présent Chapitre.

Nous venons de montrer comment l'état liquide pouvait être regardé

comme l'état limite d'un milieu solide, vitreux, très aisément déformable. De la même manière, en prenant pour point de départ un *milieu cristallin*, dont l'état initial est homogène, mais non isotrope, nous pourrions traiter du *milieu cristallin très aisément déformable;* nous serions ainsi conduits, par une voie théorique, à la notion de *cristaux fluides*, à laquelle M. Lehmann a été conduit expérimentalement. Cette notion de cristaux fluides apparaît, au contraire, comme un non-sens au point de vue de la théorie rigoureuse du fluide, où chaque élément, entièrement défini par sa température et sa densité, est toujours et essentiellement isotrope.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

DE L'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT DES MILIEUX VITREUX.

DEUXIÈME PARTIE.

LES MILIEUX VITREUX PEU DÉFORMÉS.

CHAPITRE I.

CHAPITRE II.

TROISIÈME PARTIE.

LA STABILITÉ DES MILIEUX ÉLASTIQUES.

CHAPITRE I.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

QUATRIÈME PARTIE.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES ONDES DANS LES MILIEUX VISQUEUX ET NON VISQUEUX.

CHAPITRE I.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

35659 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.


QA 931 .D87 C.1
Recherches sur l'elasticite.
Stanford University Libraries
3 6105 030 409 994


DATE DUE
TIMOSHENKO COLLECTION
IN HOUSE USE ONLY

